Kenji Fukaya

An Introduction to Mirror Symmetry

ミラー対称性入門

深谷賢治◉編

日本評論社

まえがき

本書は，『数学セミナー』の連載(2006年10月号から2007年8月号)を集め，若干の追加変更を行った書物で，テーマはミラー対称性である．

ミラー対称性はもともと理論物理学者が発見した現象であるが，本書の執筆者はほとんど数学者であり，内容も数学である．数学としてのミラー対称性の書物だと考えていただきたい．

ミラー対称性はもともとカラビ-ヤウ多様体に対する現象として発見された．(現在ではその視野はより広がっている．) ミラー対称性に出てくるカラビ-ヤウ多様体は，典型的には(複素)3次元の図形である．1次元複素多様体(リーマン面)は，曲率が正(球面)，0(トーラス)，負(穴が2個以上開いた曲面)に分類される．曲率が0の場合つまりトーラスの高次元への一般化がカラビ-ヤウ多様体である．

リーマン面やその上の種々の数学を考えると，トーラス(つまり楕円曲線)の場合がとりわけ豊かであることが知られている．トーラス上の関数の研究(楕円関数論)，複素多様体としてのトーラスの分類の研究(楕円曲線のモジュライの研究)から始まり，数論的な性質の研究まで非常に多くの豊かな話題がある．これらの話題は18・19世紀には，数学の最先端かつ中心と思われていて，当時の多くの数学者が関わった．(数論的な側面など，現在でもその研究の重要性は変わっていない．)

(複素)次元が2あるいは3になったとき，楕円曲線のような豊かな数学を生み出す空間を探すと，2次元の場合はK3曲面になり，3次元の場合には3次元のカラビ-ヤウ多様体がよい候補だろうというのは，今ではかなり広く信じられていると思う．これらの多様体に対しては，モジュライの理論や楕円関数論の高次元化と見るべき種々の理論が現在発展しつつある．(カラビ-ヤウ多様体の数論的性質の研究はまだ難しすぎてあまり進んでいないかもしれない．) ミラー対称性は，その研究の中心をなすべき現象であって，現代数学の多くの分野がそこに関わっている．ミラー対称性は，

数学としては，「予想」と見なすべきであろうが，現在その「予想」としての内容が確定しているわけではなく，その一部をなすべき面白い問題が次々と現れ，研究すべき事柄がどんどん増えていっている．

掘れば掘るほど面白いものが詰まっている宝の山，というのが，筆者などが持っているミラー対称性のイメージで，とりあえず，発見の背景になった物理への応用を考えなくても，研究すべき対象はつきない．

ミラー対称性についての書物も，専門的なものは，数学的なものも物理の立場のものも次第に多くなっている．一方，ミラー対称性は，関わる数学が多く，どれも，20 世紀に高度に発展した，初学者にとっては勉強するのが大変な数学が多い．予備知識として必要なことを全部勉強してから，ミラー対称性に関わる数学をやろう，と思っていると，おそらく予備知識を勉強しているだけで，年をとるか，勉強しきれなくなってあきらめることになる．

それで，あまり専門的でない解説書である本書のような本も有用ではないかと思う．とはいっても，本書は数学書であり，厳密な証明はなくても，書かれている内容には，手抜きはなく，数学書が持つべき正確さを意識して書かれている．個々の記事から広がっていくさまざまな分野への入り口となり，読者を導いていくことができれば大変うれしい．

2009 年 8 月
深谷 賢治

ミラー対称性入門

1 ミラー対称性とは

江口 徹
［京都大学基礎物理学研究所］

カラビ-ヤウ多様体と超弦理論

ミラー対称性(mirror symmetry)という言葉を聞かれた方は多いのではないでしょうか？ 素粒子の超弦理論の発展の中で見いだされた重要な幾何学上の発見で，最近15年ほどにわたって現代数学の重要な研究テーマとして活発な研究が行われてきました．超弦理論やゲージ理論，共形場の理論など数理物理学に触発された数学的な研究には多くの重要な結果が知られていますが，ミラー対称性は中でも最も大きなインパクトを持った研究であると言えるでしょう．

ミラー対称性を説明するためにまず超弦理論のコンパクト化から話を始めます．超弦理論では，すべての素粒子はごく短い紐(10^{-33} cm程度の長さ)のさまざまの運動状態に対応していると考えます．紐には，**閉じた紐**(closed string)と**開いた紐**(open string)の2種類が存在しますが，閉じた紐を量子化するとその最低エネルギー(基底)状態には，スピンが2で質量がゼロの状態が現れ，開いた弦を量子化すると最低エネルギーにスピンが1で質量がゼロの状態が現れます．スピン2・質量ゼロの状態は**重力子**(重力場を量子化したときに現れる粒子)，スピン1・質量ゼロの状態は**ゲージ粒子**(ゲージ理論を量子化したときに現れる粒子)とみなされます．このため閉じた弦はその励起状態を無視できる低エネルギーの現象に限れば，通常の重力理論(アインシュタインの一般相対性理論)を再現し，また開いた弦はゲージ理論の結果を再現します(図1参照)．弦の持つ無数の励起状態は宇宙初期のような超高エネルギー(極微)の世界で重要な役割を果たし，一般相対論やゲージ理論を修正する働きをします．

一般相対論が微視的な世界で困難を持つことは以前からよく知られていました．一般相対論に通常の量子化の手続きを適用すると，すべての計算

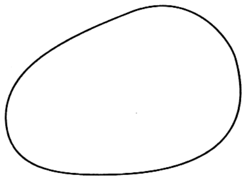




図 1

量が無限大になるという無意味な結果を与えます．量子論的な重力理論を建設することは，21 世紀に残された理論物理学最大の課題の 1 つでした．

超弦理論はこうした一般相対論の困難を克服したミクロな領域における量子論的な重力理論です．超弦理論を用いることにより，全物質が一点に集中する宇宙の創成や，巨大な物質が落ち込むブラックホールの特異点などを物理法則に基づいて議論することができるようになると考えられます．このため，超弦理論は現在，素粒子の統一理論として多くの期待が寄せられています．

さて，既に聞かれたことがあるかも知れませんが，超弦理論が整合的に存在できるのは 10 次元の空間です．10 次元が選ばれるのは理論の共形不変性のためで，これを変更することはできません：いま，弦が伸びている方向のパラメータを $0 \leqq \sigma \leqq 2\pi$，時間に対応するパラメータを τ として 10 次元空間での弦の座標を

$$X^{\mu}(\tau, \sigma), \qquad \mu = 0, 1, 2, \cdots, 9 \tag{1}$$

と表すことにしましょう．弦が運動するとその軌跡は 10 次元時空 $M^{9,1}$ の中の面を張ります．これを σ, τ のパラメータで張られる領域，**ワールドシート** Σ が 10 次元空間へ写像されたものと考えます(図 2 参照)．

複素数 z を $z = e^{\tau + i\sigma}$ と定義すると，ワールドシートは(複素構造を持つ)リーマン面となります．境界を持たないリーマン面は閉じた弦の運動に対応し，境界を持つリーマン面は開いた弦に対応します．パラメータ σ, τ の取り方には任意性があるため，弦固有の力学を記述するためには，パラメータの選び方について理論が依存しないようにすることが必要です．弦理論の**共形不変性**(conformal invariance)はこうしたパラメータの選び方に関する理論の依存性を取り去るもので弦理論の根幹をなす対称性です．

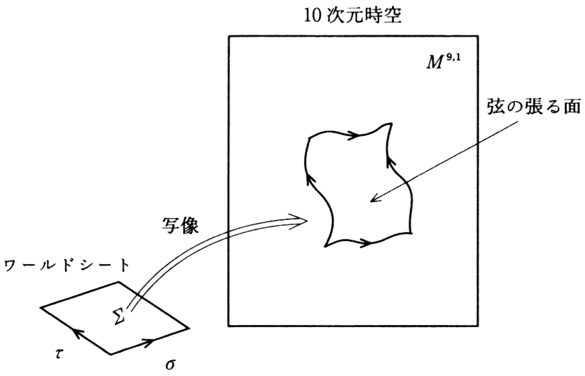


図 2

共形変換は $f(z)$ を z の任意の正則関数として $z \to f(z)$ で定義されます．すなわちワールドシートの座標 z を勝手に $f(z)$ に取り替えても理論が不変(あるいは共変)に留まることが必要です．こうした性質を持つ 2 次元の場の理論は，一般に共形場の理論と呼ばれ独特の美しい性質を持っています．

さて次に，10 次元時空が 4 次元のミンコフスキー空間 $M^{3,1}$ と 6 次元の(内部)空間 K の積 $M^{3,1} \times K$ の形を持つ場合を考えましょう．このときには理論の共形不変性を保つため許される空間 K に特別な制約がつきます．さらに $M^{3,1}$ 上の理論に超対称性があることを要求すると，内部空間 K は**カラビ-ヤウ**(**Calabi-Yau**)**多様体**と呼ばれる特別な多様体になる必要があります．内部空間 K の大きさが小さい(弦の長さの 10^{-33} cm 程度)と，日常生活ではこの空間の広がりは見ることができないので，時空は 4 次元に見えます．こうした設定を弦理論のカラビ-ヤウ・コンパクト化(compactification)と呼びます．

カラビ-ヤウ多様体は複素次元 3 のケーラー多様体ですが，曲率の一部，$U(1)$ 部分が消えているという特別な性質を持っています．ケーラー多様体では曲率の $U(1)$ 部分はリッチ・テンソルに相当するため，カラビ-ヤウ条件は**リッチ平坦条件**

$$R_{I\bar{J}}(g) = 0, \qquad I, J = 1, 2, \cdots, 6 \tag{2}$$

に帰着します．ここで $R_{I\bar{J}}$ はリッチ・テンソル，g は計量です．

曲がった空間の中の弦理論は古典的なレベルで共形不変性を持っていても，量子化された後には一般に共形不変性を失なってしまいます．このとき，共形不変性を破る量子論的な効果はリッチ・テンソルに比例します．カラビ-ヤウ多様体ではちょうどリッチ・テンソルが消えているため，弦理論は量子化された後も共形不変性を保つことが保証されます．

次に，カラビ-ヤウ多様体 K の持つ変形の自由度，**モジュライ**を議論しましょう．いま，多様体の計量 g を少し変化させて $g+\delta g$ とします．この新しい計量についてもリッチ・テンソルが消えていることを要求すると

$$R_{I\bar{J}}(g+\delta g) = 0 \tag{3}$$

このとき δg はカラビ-ヤウ多様体のモジュライを表します．式(3)を δg について一次のオーダーまで展開すると

$$\Delta_L(g)\delta g = 0 \tag{4}$$

ここで $\Delta_L(g)$ はリヒネロビッツのラプラシアンと呼ばれる作用素で δg はこのラプラシアンのゼロ固有値の固有関数に相当します．

いま，複素座標 $i = 1, 2, 3,\ \bar{j} = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ を用いると，(4)式の解としては，δg が$(1, 1)$型のもの $\delta g_{i\bar{j}}$ と，$(2, 0)$型ないし$(0, 2)$型のもの $\delta g_{ij}(\delta g_{\bar{i}\bar{j}})$ に分かれます．$(1, 1)$型のものはもともとのケーラー計量 g が$(1, 1)$型だったためそのタイプが変わりません．こうした変形を**ケーラー変形**と呼んでいます．一方，$(2, 0)$(ないし$(0, 2)$)型のものは$(1, 1)$型だった g と混ざるため，複素座標と反複素座標の定義の変更を意味します．このためこうした自由度は**複素構造の変形**と呼ばれています．

カラビ-ヤウ多様体上のケーラー変形の数は $h_{1,1}(K)$ 個，複素構造の変化の数は $h_{2,1}(K)$ 個存在することが知られています．ここで $h_{p,q}(K)$ はホッジ数と呼ばれる量で，多様体 K が持つ (p, q) 型の調和微分形式の数を表します $(h_{p,q} = h_{q,p})$．

最も典型的なカラビ-ヤウ多様体の１つは４次元複素射影空間 $\mathbb{P}^4$ の中の５次の超曲面(クインティック)

$$z_1^5+z_2^5+z_3^5+z_4^5+z_5^5-5\psi z_1z_2z_3z_4z_5 = 0,$$
$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{P}^4 \tag{5}$$

で与えられます．ここで $\{z_i\}$ は $\mathbb{P}^4$ の斉次座標，ψ は複素構造の変形のパラメータの１つです．クインティック・カラビ-ヤウ多様体では

$$h_{2,1} = 101, \qquad h_{1,1} = 1 \tag{6}$$

となります．一般にカラビ-ヤウ多様体は100〜200程度の多くの変形の自由度を持ちます．

カラビ-ヤウ多様体の**ミラー対称性**と呼ばれるものは，まず1つのカラビ-ヤウ多様体Kが与えられホッジ数$h_{1,1}(K), h_{2,1}(K)$を持つとき，別のカラビ-ヤウ多様体$\tilde{K}$でホッジ数が

$$h_{1,1}(\tilde{K}) = h_{2,1}(K), \qquad h_{2,1}(\tilde{K}) = h_{1,1}(K) \tag{7}$$

のものが存在する，と言う主張です．多様体$\tilde{K}$はKと一種の鏡映関係にあると考えられるため，Kのミラー(多様体)とも呼ばれます．以下に見るように，この鏡映関係を用いると$\tilde{K}$の周期積分の理論を用いてKに含まれる正則曲線の数を数えることなどが可能になり，数え上げ幾何学(enumerative geometry)に著しい進展が起こりました．また，複素幾何学とシンプレック幾何学を結びつける深い数学的な研究が進展しています．

$N=2$共形場理論

こうした話題に入る前に，まずミラー対称性がどのようにして発見されたかそのいきさつを紹介しましょう．前節でも触れたように弦理論では共形変換に対する不変性(あるいは共変性)が重要な働きをするため一種の共形場の理論と見ることができます．超弦理論の場合には超対称性を持つように拡張した超共形場の理論となります．**超対称性**(supersymmetry)は現在素粒子論の最も基本的な対称性の1つと考えられていますが，スピンの値が1/2だけ異なるボソン(スピンが0, 1など整数の粒子)とフェルミオン(スピンが1/2, 3/2など半奇数の粒子)が常に対となって存在するときに理論の持つ対称性です．超対称理論は，ボソンとフェルミオンの自由度がうまくバランスを保つため良い性質を持ち，真空のエネルギーが厳密にゼロになる，種々の非繰り込み定理が存在するなどの著しい結果が知られています．

一般に，ボソンしか存在しない理論にフェルミオンを付け加えて超対称性を持つ理論に変えることが可能ですが，何種類の超対称性を持たせるかに関して任意性があります．2次元の共形場の理論の場合には$N=1, 2, 4$種類の超対称性を持たせることができますが，カラビ-ヤウ多様体上にコンパクト化した弦理論は$N=2$の超共形場理論で記述されることが知ら

れています．（カラビ-ヤウ多様体ではリッチ・テンソルが消え，$U(1)$ 部分の不変性が残ることに起因します）．

共形場の理論の特徴は，一般に理論に現れる場 $\Phi(z,\bar{z})$ が z ないし $\bar{z}$ のみに依存する部分に分解することにあります．

$$\Phi(z,\bar{z}) = \phi(z)\bar{\phi}(\bar{z}) \tag{8}$$

したがって，$N=2$ 超共形変換も正則な場に作用する成分（左手成分）と反正則な場に作用する成分（右手成分）に分解します．以下では，左手成分についてまず議論しましょう．

2次元の共形変換はもともと任意の解析関数 $f(z)$ を用いて $z \to f(z)$ で定義されるため，無限個の生成子を持ち無限次元のリー環を構成します．まず，無限小の共形変換 $z \to z + \varepsilon z^{n+1}$，$n \in \mathbb{Z}$（$\varepsilon$ は無限小のパラメータ）に対応する生成子を L_n と書き，（n 番目の）ビラソロ作用素と呼ぶことにします．ビラソロ作用素は**ビラソロ代数**

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}\delta_{m+n,0}(m^3-m) \tag{9}$$

を満たします．右辺の c は共形場の理論ごとに定まっている定数で中心電荷(central charge)と呼ばれます．

$N=2$ 共形場理論には2種類の超対称変換の作用素 G_r, G_r^* と $U(1)$ 変換の生成子 J_n が存在します．G_r, G_r^* の作用素は互いに複素共役で $U(1)$ 変換のもとで逆の電荷を持っています．主要な交換関係だけ書くと

$$\{G_r, G_s^*\} = 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0} \tag{10}$$

$$[J_m, J_n] = \frac{c}{3}m\delta_{m+n,0} \tag{11}$$

$$[J_m, G_r] = G_{m+r}, \qquad [J_m, G_r^*] = -G_{m+r}^* \tag{12}$$

であり，作用素のエルミート共役（† をとる操作）は

$$\begin{aligned} L_n^\dagger &= L_{-n}, \qquad G_r^\dagger = G_{-r}^*, \\ G_r^{*\dagger} &= G_{-r}, \qquad J_n^\dagger = J_{-n} \end{aligned} \tag{13}$$

で定義します．

超共形代数の表現は添字が正の作用素を消滅演算子，負の作用素を生成演算子と考えて構成されます．L_0 と J_0 をカルタン部分環とみなしこれを対角化する表示をとるのが普通です．すなわち，基底状態(highest weight

state) $|h, Q\rangle$ は

$$L_0|h,Q\rangle = h|h,Q\rangle, \qquad J_0|h,Q\rangle = Q|h,Q\rangle \tag{14}$$

$$L_n|h,Q\rangle = G_r|h,Q\rangle = G_r^*|h,Q\rangle = J_n|h,Q\rangle = 0 \tag{15}$$

$$n > 0, \qquad r > 0 \tag{16}$$

で定義されます．h は**共形次元**(conformal dimension)，Q は $U(1)$ **チャージ**と呼びます．超対称電荷 G_r, G_r^* の添字 r は，理論のセクターによって半整数値ないし整数値をとります．以下では添字が半整数値をとる NS セクターを考えましょう．

$N=2$ 代数で特に重要な関係式は，(10)で $r=\mp 1/2, s=\pm 1/2$ とおいたもので

$$\left\{G_{\mp\frac{1}{2}}, G^*_{\pm\frac{1}{2}}\right\} = 2L_0 \mp J_0 \tag{17}$$

$G_{\mp 1/2}$ と $G^*_{\pm 1/2}$ は互いにエルミート共役なので左辺は正値です．そこで常に $h \geqq |Q|/2$ となります．

ここで，等号が成り立つ場合 $h=\pm Q/2$ が特に重要です．(17)式を左右からブラとケット $\langle h, Q|, |h, Q\rangle$ で挟むと

$$G_{-\frac{1}{2}}\left|h=\frac{Q}{2}, Q\right\rangle = 0, \qquad G^*_{-\frac{1}{2}}\left|h=-\frac{Q}{2}, Q\right\rangle = 0 \tag{18}$$

が得られます．$h=Q/2$ の状態は**カイラル・プライマリー**と呼ばれ，$G_{-1/2}$ で消される特徴があります．$h=-Q/2$ の状態は反カイラル・プライマリーで $G^*_{-1/2}$ で消されます．

上に述べた交換関係その他はそのまま理論の右手成分についても成り立ちます．以下，右手成分については $\overline{L_0}, \overline{J_0}, \overline{h}, \overline{Q}$ などとバーをつけて表しましょう．

共形場の理論に現れる状態は，左手成分と右手成分を貼り合わせて得られます．重要な状態はチャージ1のカイラル・プライマリー同士，あるいはカイラル・プライマリーと反カイラル・プライマリーを貼り合わせてできる状態で

$$\left|h=\frac{1}{2}, Q=1\right\rangle \otimes \left|\overline{h}=\frac{1}{2}, \overline{Q}=1\right\rangle \iff \text{ケーラー変形} \tag{19}$$

$$\left|h=\frac{1}{2}, Q=1\right\rangle \otimes \left|\overline{h}=\frac{1}{2}, \overline{Q}=-1\right\rangle \iff \text{複素構造の変形} \tag{20}$$

です．ここで，チャージ $Q, \overline{Q}'$ を持つ共形場理論の状態は，カラビ-ヤウ多様体上の調和 ($p = Q,\ q = Q'$) 形式に対応するものとみなします($\overline{Q}'$ が負のときは $q = 3+Q'$ ととる)．すると(19), (20)の状態はそれぞれカラビ-ヤウ多様体上の調和(1, 1), (1, 2)形式に相当し，ケーラー構造，複素構造の変形の自由度に対応することが分かります．すなわち，与えられた $N = 2$ 共形場の理論の中に(19)式の状態が $h_{1,1}$ 回，(20)式の状態が $h_{1,2}$ 回現れている場合，この理論は $h_{1,1}, h_{1,2}$ をホッジ数とするカラビ-ヤウ多様体上の弦理論を記述するものと考えられます．

一般に，与えられた共形場の理論の中に特定の状態が何回現れるかを調べるには，モジュラー不変な分配関数と呼ばれるものを構成する必要があり，分配関数の構成は**ゲップナー**(Gepner)**・ポイント**と呼ばれるモジュライ空間の特別な点においてしか実行できません．しかしこうした実例を調べてみると，共形場の理論が実際カラビ-ヤウ多様体上の弦理論を記述すること，特にその幾何学を正しく再現することが分かります．

さて，ミラー対称性の起源は共形場理論で左手，右手の成分を貼り合わせるとき，$U(1)$ チャージの相対的な符号の取り方に任意性があることからきています．すなわち表現 $|h, Q\rangle$ の指標関数を $\chi(h, Q)(\tau)$ としたとき，モジュラー不変な分配関数はその積の足し合わせ

$$Z(\tau, \overline{\tau}) = \sum_i \chi(h_i, Q_i)(\tau)\chi(\overline{h}_i, \overline{Q}_i)(\overline{\tau}) \tag{21}$$

から成り立っていますが，この Z がモジュラー変換で不変であれば，右手成分のチャージの符号を入れ替えた

$$\tilde{Z}(\tau, \overline{\tau}) = \sum_i \chi(h_i, Q_i)(\tau)\chi(\overline{h}_i, -\overline{Q}_i)(\overline{\tau}) \tag{22}$$

も自動的にモジュラー不変になります．ところで(19), (20)式で見るように $\overline{Q}$ の符号を入れ替えるとホッジ数 $h_{1,1}$ と $h_{1,2}$ が入れ替わります．したがって，分配関数(21)がカラビ-ヤウ多様体 K を記述するとすれば，(22)はそのミラー $\tilde{K}$ を記述することになります．

このため $N = 2$ 共形場理論はミラー多様体の存在を予言することになります．この辺りの事情は 1987-88 年頃にはうすうす知られるようになっていたと思います．

ミラー変換と有理曲線の数

共形場から示唆されるミラー多様体を幾何学的にはじめてあらわに構成してみせたのがグリーン(B. Greene)とプレッサー(M. R. Presser)です[1]. 彼らはクインティック・カラビ-ヤウのような超曲面 K の場合に，これを離散的な群で割ることにより新しい多様体を構成し，これが K のミラーに相当することを示しました．中でもミラー対称性の発展に決定的な影響を与えたのはキャンデラス等(P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green, L. Parks)による仕事[1]で，ミラー対称性を積極的に用いることにより，クインティック超曲面の中の正則曲線の数を高い次数まで計算して見せて，数学者達を大いに驚かせました．

次にキャンデラス等の計算を紹介しましょう．ここではクインティック・カラビ-ヤウ K とそのミラー $\tilde{K}$ を考えます．ミラー $\tilde{K}$ はもとのクインティックを離散的な群 Z_5^3 で割って得られます．ここで，3つの群 Z_5 の作用は

$$g_1 : (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \longrightarrow (\alpha z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$$
$$g_2 : (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \longrightarrow (z_1, \alpha z_2, z_3, z_4, z_5)$$
$$g_3 : (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \longrightarrow (z_1, z_2, \alpha z_3, z_4, z_5)$$

$(\alpha = e^{2\pi i/5})$. この作用で不変なカーブや固定点を差し引いた後，クインティックのオイラー数を 5^3 で割ってやると，ちょうど符号が逆転してミラー多様体ができることが分かります．いま，$h_{1,1}(K), h_{2,1}(\tilde{K}) = 1$ なので $\tilde{K}$ の複素構造の変形，K のケーラー変形は共に1次元で最も簡単な状況になります．ミラー $\tilde{K}$ の定義方程式はクインティックと同じ式(5)

$$z_1^5+z_2^5+z_3^5+z_4^5+z_5^5-5\psi z_1z_2z_3z_4z_5 = 0$$

ですが，ここでは座標 $\{z_1\}$ に群 g_1, g_2, g_3 の同一視が働いています．複素構造の変形のパラメータは ψ です．ミラー側と元の多様体側の議論の区別を明確にするために，ミラー側を **B モデル**，元の側を **A モデル**と呼ぶことにしましょう．A, B というのはタイプIIA, IIB 超弦理論の区別に対応しています．

以下，まず B モデル側を議論します．カラビ-ヤウ多様体はホロノミー $SU(3)$ を持つため，その上に**正則な(3, 0)形式** Ω がただ1つ存在します(し

たがって $h_{3,0}=1$)が，この Ω を 3 サイクルにそって積分するとサイクルの**周期**(period)が得られます．$\tilde{K}$ の持つ 3 サイクルの数は $b_3=\sum_{p+q=3} h_{p,q}=2h_{2,1}+2h_{3,0}=4$．これら 4 つのサイクルの基底 $\{A_i, B_i, \ i=1,2\}$ を標準的な関係 $A_i \cap A_j=\emptyset, \ B_i \cap B_j=\emptyset, \ A_i \cap B_j=\delta_{i,j}$ を満たすように選びましょう．周期は Ω の積分

$$X_i=\int_{A_i} \Omega, \qquad F_i=\int_{B_i} \Omega, \qquad i=1,2 \tag{23}$$

で与えられます．すると，**プレポテンシャル**と呼ばれる X_i の正則関数 F が存在して関係式

$$F_i=\frac{\partial F}{\partial X_i}, \qquad i=1,2 \tag{24}$$

が成り立ちます．すなわち，共役なサイクルの周期はプレポテンシャルの微分で得られます．B モデルの 4 つの周期は

$$\prod(B)=\left(X_1, X_2, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2}\right) \tag{25}$$

となります．(24)はカラビ-ヤウ上にコンパクト化したタイプⅡの弦理論が $M^{3,1}$ で $N=2$ 超対称性を持つことからくる関係で，**special geometry** の関係式とも呼ばれます．

周期 X_i, F_i はパラメータ ψ の関数で，ψ に関する確定特異点型の微分方程式(ピカール-フックス方程式)に従います(特異点は $\psi=0,1,\infty$ にある)．微分方程式を解いて(24)の関係を用いるとプレポテンシャルが決定され，その 3 階微分は

$$K_{\psi\psi\psi}=\frac{\partial^3 F}{\partial \psi^3}=\text{const}\times\frac{\psi^3}{1-\psi^5} \tag{26}$$

となります．$K_{\psi\psi\psi}$ は**湯川結合**(Yukawa coupling)と呼ばれる量で，B モデル側では上のように非常に簡単な ψ の関数になります．

湯川結合(26)は $\psi=1$ で発散しています．$\psi=1$ では，$\tilde{K}$ は特異性を持った**コニフォルド**(conifold)と呼ばれる空間になります．コニフォルドでは 3 サイクルの 1 つ —— A_2 としましょう —— がつぶれることが知られています．すると周期 X_2 は $X_2 \approx \psi-1$ となります．双対の周期 F_2 は $(\psi-1)\log(\psi-1)$ のように振る舞います．一方 $\psi \to \infty$ で F_2 は有限値をとることが示されます．

$$F_2(\psi) = \left(\frac{5}{2\pi i}\right)^3 \sum_{n=0} \frac{(5n)!}{(n!)^5 (5\psi)^{5n}} \tag{27}$$

$\psi = \infty$ は **large complex structure limit** と呼ばれる特異点で，ピカール-フックス方程式はここでその指数が完全に縮退して const, $\log \psi$, $\log^2 \psi$, $\log^3 \psi$ の振る舞いを持つ4つの周期が現れます．すなわち $F_2 \sim$ const, $2F_1 - X_1 \sim \log \psi$ などとなります．

以上Bモデルの計算で最も重要な点は，周期やプレポテンシャルが複素構造のパラメータ ψ だけに依存しケーラー・パラメータには依存しない点で，これは超対称性の縛りからくる帰結です．$M^{3,1}$ での物理に $N = 2$ 超対称性があるため，ベクトル多重項とハイパー多重項は互いに相互作用を持たないことによります．このためBモデルの計算は，ケーラー・パラメータを無限に大きく取った極限における計算とみなすことが可能になります．ケーラー・パラメータはカラビ-ヤウ多様体のサイズに相当し，サイズが大きい空間は曲率が小さく平坦な空間に近いので理論の量子効果は抑えられ古典的な近似が正しくなります．すなわち，Bモデルの計算には量子補正が存在せず，周期積分を用いたプレポテンシャルの計算は厳密に正しい答えを与えることになります．

こうした状況をAモデル側で見るとどう見えるでしょうか？ Aモデルでは周期やプレポテンシャルがケーラー・パラメータに依存するため理論に複雑な量子補正が現れます．これは非線形シグマ模型のインスタントン補正に相当するもので，厳密な答えを得るには高次のインスタントン補正を無限に足し上げる必要があります．数学的にはカラビ-ヤウ多様体 K に含まれる任意の次数の有理曲線の数を求める問題に相当します．これらは従来は手の出なかった問題ですが，キャンデラス等は巧みな仮説を用いてインスタントン補正の計算法を発見しました．

空間 $\tilde{K}$ のパラメータ ψ が大きいときには，空間 K のケーラー・パラメータ（t と呼ぶことにします）も大きくなると考えられます．キャンデラス等は K のパラメータ t が $t \approx \log \psi$ のように振る舞うと考えました．サイズ t が大きいカラビ-ヤウ多様体は，平坦な空間に近づくため量子効果が抑えられて古典的な近似が良くなります．古典的な近似ではAモデルのプレポテンシャルは $h_{1,1}+1$ 個のケーラー・パラメータ $w^0, w^A, A = 1, \cdots, h_{1,1}$ を用いて

$$F_{cl}=-\frac{1}{3!}\frac{d_{ABC}w^A w^B w^C}{w^0} \tag{28}$$

と表されることが知られています．ここで d_{ABC} は w_A, w_B, w_C に対応する 2 次のサイクル e_A, e_B, e_C の交点数 $\int_K e_A\wedge e_B\wedge e_C$ です．いまは $h_{1,1}(K)=1$ なので w_0, w_1 しかありませんが，t は比 w_1/w_0 に等しい；$t=w_1/w_0$ としましょう．A モデルの 4 つの周期は

$$\prod(A)=\left(w_0, w_1, \frac{\partial F}{\partial w_0}, \frac{\partial F}{\partial w_1}\right) \tag{29}$$

です．$\int e_1\wedge e_1\wedge e_1=5$ を用いると

$$F_{cl}=-\frac{5}{6}(w_0)^2t^3 \tag{30}$$

となります．厳密なプレポテンシャルは摂動論的ループ補正とインスタントン補正を受けて

$$F=F_{cl}+F_{loop}+F_{inst} \tag{31}$$

の形をとります．ここで F_{loop} は t について 2 次，1 次，0 次の項の和，F_{inst} は $e^{2\pi int}$, $n=1,2,\cdots$ の形の項の無限和で与えられます．

さて，A モデルはケーラー変形を扱うので偶数次のサイクル，B モデルは奇数次のサイクルが関係しており，これらのサイクルの間に鏡映関係があります．キャンデラス等は A, B モデルの周期 $\prod(A), \prod(B)$ が互いに整数行列のシンプレクティック変換で結ばれていることを仮定し，この変換行列を決定しました．B モデル側の周期の振る舞いは分かっているので，この関係から A モデル側の振る舞いが決まります．まず w_1 は $\psi\to\infty$ で $\log\psi$ のように振る舞うことが分かります．一方 w_0 は $\psi=\infty$ で定数になる F_2 と同一視されます．この結果

$$\begin{aligned} t=\frac{w_1}{w_0}&=\left(\frac{5}{2\pi i}\right)^3\left(\frac{-2F_1+X_1}{F_2}\right)\\ &=\frac{-5}{2\pi i}\left[\log 5\psi-\frac{\left(\frac{2\pi i}{5}\right)^3}{F_2(t)}\sum_{m=1}\frac{(5m)!}{(m!)^5(5\psi)^{5m}}\left(Li_2(1+5m)-Li_2(1+m)\right)\right] \end{aligned} \tag{32}$$

ここで $Li_2(x)=\sum_{m=1}\frac{x^m}{m^2}$ は dilog 関数です．F_2 は(27)で与えられる $1/\psi$ の

冪級数なので，(32)を用いると$\psi=\infty$でtとψは互いを展開することができます．(32)を**ミラー変換**と呼びます．これを例えば湯川結合に適用してtの展開に書き直すと

$$K_{ttt}=K_{\psi\psi\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^3=5+2875e^{2\pi it}+4876875e^{4\pi it}+\cdots \tag{33}$$

を得ます．

面白いのは，インスタントン補正の部分の係数が整数で出てくることで，これがクインティックの中の有理曲線の数に関係しています．

ミラー変換を高次の項まで調べると湯川結合は

$$K_{ttt}=5+\sum_{k=1}\frac{n_k k^3}{1-e^{2\pi ikt}}e^{2\pi ikt} \tag{34}$$

の形の展開を持ち，これを3回積分すると

$$F(t)=\frac{5}{3!}t^3+at^2+bt+c+\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^3\sum_{k=1,m=1}\frac{n_k}{m^3}e^{2\pi imkt} \tag{35}$$

を得ます．ここに現れるn_kが次数kの有理曲線の数に一致します．

$$n_1=2875,\qquad n_2=609250,\qquad n_3=317206375,\cdots$$

弦理論のインスタントン振幅が有理曲線の数に比例するのは，A モデルの作用の停留点が

$$\frac{\partial X^i(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}}=0,\qquad \frac{\partial X^{\bar{i}}(z,\bar{z})}{\partial z}=0 \tag{36}$$

で与えられるためで，上式の解X^iは正則写像になります．(35)に現れる整数mは multiple-cover と呼ばれる補正の因子です．

複雑な変換(32)を用いて(35)の展開を計算すると，次々と正しい整数n_kが得られるのは大変不思議な感じがします．数学的な証明は数年後にギベンタール(A. Givental)とヤウ等(B. Lian, K. Liu, S. T. Yau)によって与えられました．またミラー変換はパラメータ数が多い場合カラビ-ヤウ多様体$h_{1,1}(K)=h_{1,2}(\tilde{K})=2,3$の場合に拡張され，正しい有理曲線の数が再現されることが確認されています[1]．

一般に，ワールドシートを種数の高いリーマン面としカラビ-ヤウ多様体Kへの正則写像を考えると，次数kと種数gに依存する量n_k^gを導入することができます．種数の高いリーマン面はモジュライを持ちますが，これらのモジュライについては積分した量を考えます．するとn_k^gはKのシ

ンプレクティック構造の不変量となり，K の**グロモフ-ウイッテン不変量**と呼ばれます．

ミラー対称性の今後

以上，ミラー対称性の初期の発展を中心に解説をしてきました．ミラー対称性にはその後いくつかの大きな発展が起きています．

1. ホモロジカル・ミラー対称性

A モデル側はシンプレクティック多様体の位相不変量を取り扱う理論，一方 B モデル側は複素解析的な構造を取り扱う理論です．したがってミラー対称性は，複素解析的な幾何学のカテゴリーとシンプレクティック幾何学のカテゴリー(深谷カテゴリー)の間に存在するある種の対応関係を表していると見ることが可能です．こうした見方がホモロジカル・ミラー対称性で，物理学からは少し離れた純粋数学になりますが現在活発な研究が行われています．

2. 局所的ミラー対称性

クインティックなカラビ-ヤウ多様体はコンパクトなカラビ-ヤウの典型ですが，$\mathbb{P}^2$ 上のカノニカル束のように非コンパクトなカラビ-ヤウ多様体も弦理論では重要な働きをします．特に，ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_n$ 上のカノニカル束や，$\mathbb{F}_n$ をブルーアップした曲面上のカノニカル束はその上にコンパクト化した弦理論から重力が脱落し純粋なゲージ理論が得られるため非常に重要です．こうした，非コンパクトなカラビ-ヤウ多様体についてはその鏡映 $\tilde{K}$ はリーマン面になりミラー変換が大変簡単化されることが知られています．

3. 位相的バーテックス

上で述べた，非コンパクトなカラビ-ヤウ多様体の取り扱い関しては，ここ 5-6 年で大きな進展がありました．3 次元のチャーン-サイモンズ理論と閉じた弦理論との双対性に基づく位相的バーテックスの方法が開発され [2]，グロモフ-ウイッテン不変量を全次数，全種数で足し上げた結果を求

めることが可能になりました．位相的バーテックスは自由フェルミオン場，シューア関数，3 次元のヤング図などを用いる手法で大変興味深いものですが，コンパクト・カラビ-ヤウについては位相的バーテックスの構成は困難なようです．

4. ビラソロ予想

カラビ-ヤウ条件を満たさないファノ多様体などに関しては，ビラソロ予想と呼ばれるものが知られています[3]．カラビ-ヤウ条件を満たさない多様体 K では，リーマン面のモジュライ空間上のコホモロジー・クラス（マンフォード-森田クラス）が理論と結合するため，K の 2 次のコホモロジー・クラスのパラメータ t^i，$i=1,\cdots,b_2$ が無限個のパラメータ t^i_n，$n=0,1,\cdots$ に拡張されます．ビラソロ予想は $\{t^i_n\}$ から構成される無限個の作用素 L_n（センターが K のオイラー数に等しいビラソロ代数を満たす）が理論の分配関数 $Z=e^F$ を消すという仮説です．射影空間，1 次元カーブなどの場合については数学的な証明が与えられています．

ミラー対称性の研究はここ 10 年ほどの間に大きく発展しました．この本でも，その様子が次第に浮き彫りにされてゆくものと思います．

最後に，超弦理論の双対性はミラー対称性を超えて，まだまださまざまな不可思議な「対称性」を予言していることを指摘しておきましょう．例えば，**ヘテロティック・タイプ II 双対性**[4]では，（K_3 ファイブレーションを持つ）カラビ-ヤウ多様体のモジュライと K_3 曲面上のゲージ理論のモジュライの間に双対関係があることが知られています．こうした双対関係はまだ組織的な数学的研究がまったく行われていない未開の分野で，今後大きな発展が起きる可能性を秘めていると思われます．

参考文献

［1］ ミラー対称性に関する論文選集に
"*Essays on Mirror Manifolds*", eds. S. T. Yau, International Press, 1992,
"*Mirror Symmetry* II", eds. B. Greene and S. T. Yau, International Press, 1997
があります．

［2］ M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, "*The*

Topological Vertex", Commun. Math. Phys. 254 (2005) 425–478.
[3]　T. Eguchi, K. Hori and C. S. Xiong, "*Quantum Cohomology and Virasoro Algebra*", Phys. Lett. B402 (1997) 71–80.
[4]　S. Kachru and C. Vafa, "*Exact Results for $N = 2$ Compactifications of Heterotic Strings*", Nucl. Phys. B450 (1995) 69–89.

［えぐち　とおる］

2 グロモフ-ウィッテン不変量入門

深谷賢治
[京都大学大学院理学研究科]

1 はじめに

グロモフ-ウィッテン不変量(Gromov-Witten invariant)はその名の通り，グロモフとウィッテンにより，互いに異なった動機から独立に発見されました．

グロモフの動機はシンプレクティック幾何学にあり，すなわち大域的なシンプレクティック幾何学を研究するための基本的な手段として，概複素多様体へのリーマン面からの正則写像を研究するということでした．このグロモフの考えは，後にルアンらによって深められ，「シンプレクティック多様体へのリーマン面からの擬正則写像(pseudoholomorphic map)の数を数えて得られる不変量」が確立しました．これが現在グロモフ-ウィッテン不変量と呼ばれる不変量です．

一方，ウィッテンは，超対称性をもった位相的シグマ模型の分配関数としてこれと同じ不変量を導入しました．

この物理的な見方だと，例えば，グロモフ-ウィッテン不変量が単に(概)複素多様体の不変量であるだけではなく，より強くシンプレクティック多様体の不変量でもある，というシンプレクティック幾何学への応用には，最も基本的な点が理解されない気がします．

一方，位相的シグマ模型としてグロモフ-ウィッテン不変量を見ることの最大の利点は，その性質の多くが，物理的考察から導かれることです．その典型例は結合法則で，すなわち，グロモフ-ウィッテン不変量から得られるコホモロジー環の変形(量子コホモロジー環と呼びます)が環であること，特に変形後も積の結合法則が成り立つことは重要です．これを一般化したのが，グロモフ-ウィッテン不変量から作られる母関数の満たす微分方程式，すなわち WDVV 方程式[1)]です．さらに，この本のテーマである

ミラー対称性にグロモフ-ウィッテン不変量が一方の主役として登場する理由も，位相的シグマ模型の分配関数としてグロモフ-ウィッテン不変量を見ることによって初めて理解されます．ほかにも1章にでてきたヴィラソロ予想などもその例です．

グロモフ-ウィッテン不変量については，筆者はいくつかの解説をすでに書いています．([1]の 135-174 ページ，[2]，[3]の6章，[4]のV章など)．そこで本章では，それらより話を易しくして，交点数とは何かとか，ホモロジーとはなにか，から話を初めて，グロモフ-ウィッテン不変量から導かれる量子コホモロジーが普通のコホモロジーと異なる一番易しい場合，つまり複素射影平面の場合にそれが何になり，どういう幾何学的事実に対応するか，などに進んでいくことにします．

2 交点数

グロモフ-ウィッテン不変量は交点理論の一種と見なすことができます．まず交点理論について復習します．

定理 2.1 n 次方程式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1}$$

の根は，重根を含めて，また複素数の範囲で考えると，ちょうど n 個ある．

という定理は高校で習います．方程式(1)は連立方程式

$$y=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\qquad y=0 \tag{2}$$

に書き直せます．これを一般化して，

$$\begin{cases}P(x,y)=0\\Q(x,y)=0\end{cases} \tag{3}$$

を考えましょう，ここで，P,Q はそれぞれ n,m 次の(2変数)多項式です．

1) Witten, Dijkgraaf, Verlinde, Verlinde の頭文字をとって名づけられている．

定理 2.2(ベズーの定理)　方程式(3)の根の数は，ちょうど mn 個である．ただし，重根も含めて考え，さらに「無限遠方」の根も数える．

さて，上でのべたベズーの定理は，

方程式(3)の根の数は「トポロジー的」な量である

ということを意味します．このことを説明しましょう．2つの集合

$$\mathcal{P} = \{(x,y)\,|\,P(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{Q} = \{(x,y)\,|\,Q(x,y) = 0\}$$

を考えます．(3)の根の数とは

$$\#(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \tag{4}$$

にあたります．($\#A$ で集合 A の元の数を表します．)

(4)のような数を「交点数」(intersection number)といいます．ベズーの定理は，交点数が図形を表す方程式の次数だけできまる，ということを主張しています．次数が同じ図形どうしは，係数を連続的にかえることで一方から他方へ連続的に変形することができます．すなわち，

交点数は図形の連続変形で不変である

これが，交点数がトポロジー的な量である，といった意味です．

ここで無限遠での交わりも考える，ということの意味を説明します．連立方程式

$$\begin{cases} 2x+3y = 0 \\ 6x+ay = 3 \end{cases} \tag{5}$$

を，定数 a をいろいろ動かして考えましょう．$a \neq 9$ であれば，(5)にはちょうど1つ解があります．(5)は(4)の特別な場合で，$n = m = 1$ です．ですから，この1というのは 1×1 でベズーの定理と話が合っています．

問題は $a = 9$ の場合で，この場合は(5)には解がありません．これでは都合がわるいので，$a = 9$ の場合は，「無限遠方に解がある」，と思います．

射影空間(今考えているのは複素射影平面)というのは，直線の方向ごとに1つづつ「無限遠点」があると思い，それらの無限遠点を平面に付け加えたものです．今の例では，$2x+3y = 0$ の方向(つまりベクトルで書くと $(3, -2)$ の方向)にあたる無限遠点で，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が交わると考えます．

3　ホモロジー

前の節では，代数幾何的に，つまり多項式の解の集合を考えて，交点数について述べてきました．もっとトポロジー的に述べるには，ホモロジー(homology)という言葉を使います．

空間 X に対して，X に含まれている d 次元の図形全体の集合 $\mathscr{X}(d)$ を考えます．$\mathscr{X}(d)$ の元である2つの図形 $\mathscr{P}$ と $\mathscr{Q}$ があったとき，その交点数を考えたいのですが，$\mathscr{X}(d)$ は集合として大きすぎて，そこで考えたのでは，あまりよく分かりません．

そこで，$\mathscr{X}(d)$ の元 $\mathscr{P}$ が別の元 $\mathscr{P}'$ に「連続変形で移るとき[2)]」と $\mathscr{P}$ は $\mathscr{P}'$ と同じものだとみなします．こうすると $\mathscr{X}(d)$ よりだいぶ小さい扱いやすい集合が得られます．これがおおよそ X の d 次のホモロジー群というものです．

たとえば，複素射影平面を考えて，多項式 $P(x,y)$ の根全体 $\mathscr{P}$ は，連続変形で移るものを同じとみなすと，P の次数 k で決まります．この元を $k[\mathbb{C}P^1]$ と書くことにします[3)]．

ここで $k[\mathbb{C}P^1]$ と書き $[\mathbb{C}P^1]$ の k 倍であるかのごとくに書きましたが，本当にそう考えることができます．たとえば $k=2$ つまり P が2次式である場合：

$$P_a(x,y) = x^2+axy+4y^2-1$$

を a をいろいろ動かして考えます．$a=0$ のときは，$P_a(x,y)$ の根全体 $\mathscr{P}_a$ は楕円です．一方，a を動かし，$a=-4$ になったときは

$$P_{-4}(x,y) = (x-2y+1)(x-2y-1)$$

ですから，$P_{-4}(x,y)$ は直線 $\mathscr{L}_1: x-2y+1=0$ と直線 $\mathscr{L}_2: x-2y-1=0$ の和集合になります．$\mathscr{L}_1$ は $\mathscr{L}_2$ に連続的に移るので，同じものと考えます．結局：

2)　連続変形で移るというのは，ホモロジー群の説明としてかなり不正確です．連続変形で移る，ではなくホモローガス，というのが正しい説明ですが，ここでは省略します．

3)　$\mathbb{C}P^1$ は(ある)1次式の根の全体として表される集合，つまり直線のことです．

(2 次式が表す図形) = 2×(1 次式が表す図形)

という式になります. (ここでは, 集合の和がいつの間にか足し算に化けていますが, いいことにします.) もっと一般に

(k 次式が表す図形) = k×(1 次式が表す図形)

という式が成り立ちます. 言い換えると,「複素射影平面では, おのおのの整数 k に対して, (k 次式が表す図形) に対応するホモロジーの元があります.」 この「…」の中のことを言い換えると

複素射影平面の 2 次のホモロジー群は整数全体 $\mathbb{Z}$ である

ということになります[4]. 空間 X の d 次のホモロジー群のことを $H_d(X)$ と書きます. 複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ のホモロジーは

$$H_d(\mathbb{C}P^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & d = 0, 2, 4 \\ 0, & \text{他の場合} \end{cases} \qquad (6)$$

になります. $d = 2$ の場合の(6)についてはすでに説明しました. $d = 0$ のときは, 0 次ホモロジーの元は 0 次元の図形で表されます. つまり点です. この場合の $\mathbb{Z}$ というのは, 点の個数を表します. $d = 4$ のときは, 複素射影平面に含まれる 4 次元の図形で境界がないものは複素射影平面自身だけです. この場合の $\mathbb{Z}$ というのは, 複素射影平面何個分かを表します.

$d = 0, 2, 4$ の場合の $H_d(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z}$ の $1 \in \mathbb{Z}$ に当たる元のことを, u_d と書くことにします. u_0 は 1 点, u_2 は直線が表す $\mathbb{C}P^2$ に含まれる図形(複素で考えた直線なので実の次元は 2), u_4 は $\mathbb{C}P^2$ そのものです.

さてホモロジーの言葉を使うと, 交点数についての定理 2.2 を次のように表すことができます.

$$n[u_2] \cdot m[u_2] = nm[u_0]. \qquad (7)$$

この式は, n 次式で表される図形(つまり $n[u_2]$)と m 次式で表される図形(つまり $m[u_2]$)の交わり(これを・で表す)が, nm 個の点(つまり $nm[u_0]$)である, といっています.

次の 5 つの式はもっと簡単です:

$$n[u_0] \cdot m[u_0] = 0,$$
$$n[u_2] \cdot m[u_0] = 0,$$
$$n[u_4] \cdot m[u_0] = nm[u_0],$$
$$n[u_4] \cdot m[u_2] = nm[u_2],$$
$$n[u_4] \cdot m[u_4] = nm[u_4]. \qquad (8)$$

たとえば1番目の式は，複素射影平面上の2点の共通部分は，2点がたまたま一致しない限り空集合である，という当たり前の事実をいっています．$n=m=1$ の場合の3番目の式は，複素射影平面自身と一点 P の共通部分は一点 P になる，ということをいっています．

(7)と(8)をもう少し見やすくするために，「ポアンカレ双対」というものを使って，「ホモロジー」を「コホモロジー」に書き換えます．ポアンカレ双対とは，

$$[u_d]^* = x^{(4-d)} \tag{9}$$

という写像*のことで，d 次元の図形の表すホモロジーの元 u_d に，$4-d$ 次のコホモロジーの元 x_{4-d} を対応させます．

注意 3.1　一般に d 次のコホモロジー群 $H^d(X)$ なるものが空間 X に対して定まっていて，X が n 次元のコンパクトで向きのついた多様体であると，

$$H_d(X) \cong H^{n-d}(X)$$

という同型，ポアンカレ同型が成り立ちます．(9)はこの同型を表しています．（複素射影平面の場合 $n=4$ です．）

さて，ポアンカレ同型*で，(7)と(8)を移すと，次の式になります．

$$x^{(d)} \cup x^{(d')} = \begin{cases} x^{(d+d')}, & d+d' \text{ が4以下のとき} \\ 0 \quad , & d+d' \text{ が5以上のとき} \end{cases} \tag{10}$$

ここで ∪ はカップ積と呼ばれ，交点「数」[5] すなわち・をポアンカレ同型*で移したものです．例えば，$d=d'=2$ の場合には，$x^{(2)} \cup x^{(2)}$ は

$$x^{(2)} \cup x^{(2)} = (u_2 \cdot u_2)^* = u_0^* = x^{(4)}$$

になります．（$u_2^* = x^{(2)}$ でした．）

$x^{(0)}$ のことを1，$x^{(2)}$ のことを x，$x^{(4)}$ のことを x^2 と書くことにすると，

4)　多項式の次数は負の数にはならないので，k は整数ではなくて自然数のはずだ，というのはそれはそうなのですが，ホモロジーでは，多項式で表されない図形も考えるし，また，交点数には本当は（一般には）符号を考えます．そんな事情で，「複素射影平面の1次のホモロジー」は自然数全体ではなくて，整数全体になります．

5)　数に括弧がついているのは，たとえば(8)の右辺は数ではなくホモロジーの元だからです．

(10)は複素射影平面のコホモロジーに$\cup$で積を考えたものが，環$\mathbb{Z}[x]/(x^3)$になることを意味します．ここで(x^3)とはx^3で生成される多項式環$\mathbb{Z}[x]$のイデアルのことです．つまり，$\mathbb{Z}[x]/(x^3)$とは，整数係数1変数多項式全体$\mathbb{Z}[x]$に関係式$x^3=0$を付け加えたものです．まとめると

$$H(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^3).$$

これは次元が高い複素射影空間(複素n次元複素射影空間を$\mathbb{C}P^n$と書く)に対して一般化され，

$$H(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1}) \tag{11}$$

が成り立ちます．次の節で説明したいのは，これが「量子コホモロジー環」になると

$$HQ(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}[q,x]/(x^{n+1}-q) \tag{12}$$

とかわることです．

4　複素射影平面の量子コホモロジー環

この節では(12)を$n=2$の場合，つまり複素射影平面の場合に説明します．その場合に(12)が(11)と異なるのは，次の2つの等号です．((12)は$x^3=q$という等式が成り立つことを意味していることに注意してください．)

$$\begin{aligned} x^1 \cup_q x^2 &= q, \\ x^2 \cup_q x^2 &= qx. \end{aligned} \tag{13}$$

$\cup_q$は，カップ積$\cup$の量子変形，あるいは量子カップ積と呼ばれます．qは通常は新しい不定元(つまり形式的なパラメータ)と見なされますが，(少なくともこの場合は)具体的に複素数を代入して考えることもできます．$q=0$を代入して考えると，(13)は$x^1 \cup x^2 = x^2 \cup x^2 = 0$になって，(11)と一致します．$q=0$に当たる通常のカップ積(大体，交点数のこと)が，$q$を0でない数に変えることで「量子変形」され量子カップ積になると考えてください．

前の節の最後を逆にたどって，(13)をホモロジーの言葉に直すことができます．するとこの2つの式は

$$u_2 \cdot_q u_0 = qu_4 \tag{14}$$

$$u_0 \cdot_q u_0 = qu_2 \tag{15}$$

になります．この 2 つの式の表す幾何学的内容は次のことです．

定理 4.1　$\mathbb{C}P^2$ のどの 2 点に対しても，その 2 点を通る直線がただ 1 つ存在する．

定理 4.1 そのものは明らかでしょう．これがなぜ(14),(15)になるのかを説明します．

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を $\mathbb{C}P^2$ に含まれる図形とします．q がつかないただの交点「数」すなわち・とは，おおよそ，交わり $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}$ のことでした．この・を量子化したもの $\cdot_q$ は，「q のべき級数」になり

$$\mathcal{P}\cdot_q\mathcal{Q} = \sum q^d(\mathcal{P}\cap_d\mathcal{Q}) \tag{16}$$

と表されます．ここで

$$\mathcal{P}\cap_d\mathcal{Q} = \mathcal{P} \text{ および } \mathcal{Q} \text{ と交わる } d \text{ 次有理曲線の和集合.} \tag{17}$$

d 次有理曲線という言葉を説明します．グロモフ-ウィッテン不変量では，リーマン面からの正則写像を考えます．量子コホモロジー環を定義するには，一番易しいリーマン面つまりリーマン球面を考えます．リーマン球面とは複素平面に無限遠点を付け加えたもの $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ です．

複素射影平面とは 2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ に無限遠直線を付け加えたものでした．リーマン球面から複素射影平面への正則写像

$$\varphi : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}P^2$$

は，$z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を変数とする多項式 f, g, h を使って

$$\varphi(z) = \left(\frac{f(z)}{h(z)}, \frac{g(z)}{h(z)}\right) \tag{18}$$

のように表すことができます[6]．($f(a) = g(a) = h(a) = 0$ なる a がないように選ぶことができ，そうすると(18)の表示は f, g, h を一斉に定数倍することを除いてただ一通りに決まります．)

f, g, h の多項式としての次数の中で一番大きい数を φ の次数と呼び，次数が d である φ の像を d 次有理曲線と呼びます．有理曲線の有理とはリーマン球面の像であることを指します．

例えば，$d=0$ の場合を考えてみましょう．この場合は f, g, h は 0 次多

6）$h(z)=0$ に対しては，$\varphi(z)$ は無限遠直線上にあると考える．

項式つまり定数です．つまりφの像は一点，すなわちφは定値写像$\varphi(z)=c\in\mathbb{C}P^2$になります．この場合$\varphi$の像が$\mathcal{P}$と$\mathcal{Q}$の両方と交わるとすると，$c$が$\mathcal{P}$と$\mathcal{Q}$の両方に含まれなければいけません．つまり，(17)は

$$\mathcal{P}\cap_0\mathcal{Q}=\mathcal{P}\cap\mathcal{Q} \tag{19}$$

ということになります．これから(16)が$q=0$で通常の交点「数」になることが分かります．

次に$d=1$の場合を考えましょう．この場合はf,g,hは1次式です．

$$h(z)=a(z-b)$$

であったとします．定義域$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$の変数変換をしてbが無限遠点∞になるようにしてしまいます[7]．すると，(18)の分母は定数になって不要になり

$$\varphi(z)=(az+b,cz+d)$$

と表されることになります．つまり，1次有理曲線の像とは直線のことです[8]．

さてそれが分かったところで，(15)を考えましょう．u_0とは一点のことでした．そこで$\mathcal{P}$と$\mathcal{Q}$がそれぞれ($\mathbb{C}P^2$の)1点PとQである場合を考えます．すると，(16)の$d=1$の場合とは，PおよびQを通る直線の和集合になります．定理4.1は，そのような直線がちょうど1つあること，つまり，

$$u_0\cap_1 u_0=\text{直線1本}$$

を意味します．直線が表す2次のホモロジー類がu_2でしたから，

$$u_0\cdot_q u_0=qu_2+q^2\text{以上がでてくる項}$$

になります．実は射影平面の量子コホモロジー環の場合には，q^2以上が出てくる項つまり2次以上の有理曲線の寄与はないことがわかり，(15)が示されます．

今度は(14)を考えましょう．u_0とは一点でu_2とは直線のことでしたから，$\mathcal{P}$は直線，$\mathcal{Q}$は一点Qのことです．すると，$u_0\cap_1 u_2$とは，直線$\mathcal{P}$と交わり，Qを通る直線全体の和集合になります．

$\mathcal{P}$上に1点Pをとると，これとQを通る直線$\overline{PQ}$がちょうど一本あります(定理4.1)．Pを動かして和集合をとると

$$\bigcup_{P\in\mathcal{P}}\overline{PQ}$$

は2次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ 全体，あるいは無限遠点までかんがえると $\mathbb{C}P^2$ 全体になります．$\mathbb{C}P^2$ 全体が表しているのが u_4 でした．つまり，

$$u_0 \cdot_1 u_2 = u_4$$

になります．これから，(14)が得られます．

5　数え上げ幾何学

前の節では，カップ積の量子化あるいは $\cdot_d$ を考えました．このときは2つのホモロジー群の元 u, u' に対して $u \cdot_d u'$ は再びホモロジー群の元になりました．ホモロジー群ではなくて，数をアウトプットとして得るには，もう1つホモロジー群の元 u'' をとって

$$q_d(u, u', u'') = (u \cdot_d u') \cdot u'' \tag{20}$$

を考えます．(右辺の・はただの交点数のことです．) 4節の計算を見直すと，これは(射影平面のとき)計算できて

$$q_1(u_a, u_b, u_c) = \begin{cases} 1, & a+b+c=4 \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{21}$$

になります[9]．一方 $q_d(u, u', u'')$ は次のような自然な幾何学的意味を持っています．

$$q_d(u, u', u'') = 「u, u', u'' \text{ を通る } d \text{ 次有理曲線の数}」 \tag{22}$$

右辺では，条件を満たす有理曲線が有限個である場合のみ考え，そうでなければ0とする．

3つに限らずもっと多くのホモロジー群の元 $u(1), \cdots, u(k)$ を考えることができます．つまり，

$$q_d(u(1), \cdots, u(k)) = 「u(1), \cdots, u(k) \text{ を通る } d \text{ 次有理曲線の数}」 \tag{23}$$

この量 $q_d(u(1), \cdots, u(k))$ は $u(i)$ たちの入れ替えで不変になり，また $u(i)$

7)　それには，例えば，一次分数変換 $z = b(w+1)/w$ をすればよい．例として，$b=1$, $\varphi(z) = (z/(z-1), (z+1)/(z-1))$ の場合を考えると，$z = (w+1)/w$ を代入して計算して $\varphi(w) = (w+1, 2w+1)$.

8)　ちょっと嘘をついています．つまり，無限遠直線はそうなりません．これは(18)のところで嘘をついたせいです．

9)　u_a は a 次元の図形で，u_0 は点，u_2 は直線，u_4 は射影平面全体でした．

について線形です．さらに$u(i)$のどれかが4次元(つまり$\mathbb{C}P^2$)だと0になります．このことから，$u(i)$が点とか直線とかの場合を考えれば十分であることが分かります．右辺のd有理曲線の数が有限個という条件より$q_d(\underbrace{u_0, \cdots, u_0}_{3d-1}, \underbrace{u_2, \cdots, u_2}_{l})$だけが0でない量です．一方

$$q_d(\underbrace{u_0, \cdots, u_0}_{3d-1}, \underbrace{u_2, \cdots, u_2}_{l}) = d^l q_d(\underbrace{u_0, \cdots, u_0}_{3d-1})$$

が簡単に分かるので，

$$n_d = q_d(\underbrace{u_0, \cdots, u_0}_{3d-1}) \tag{24}$$

を計算すれば十分なことが分かります．この数n_dの幾何学的意味は

n_d = 与えられた$3d-1$個の点を通るd次曲線の数

です[10]．$d=1$のとき，この数が1である，というのが定理4.1でした．n_dのような数を求める問題を「数え上げ幾何学」(enumerative geometry)といい，代数幾何学では古典的な問題です．

この数から決まる母関数が，(最初に名前だけ出した)WDVV方程式を満たすことが分かり[11]，そのことを使うと，次の漸化式が示されます．

$$n_d = \sum_{a+b=d} n_a n_b (a^2 b^2_{3d-4}C_{3a-2} - a^3 b_{3d-4}C_{3a-1}). \tag{25}$$

(WDVV方程式からの(25)の導出はコンセビッチによりなされました．射影平面の場合のWDVV方程式はルアンとティアンによって証明されました．) 以上についてもっと詳しくは，例えば，[3]の6.3節参照．

6 カラビ-ヤウ多様体

ミラー対称性では(あるいは超弦理論では)カラビ-ヤウ多様体が重要な役割を果たしますが，最後にその理由の一端を説明したいと思います．

コホモロジーの元は次数を持っています．普通のカップ積では，d次のコホモロジーの元とd'次のコホモロジーの元の積は$d+d'$次になります．これは，n次元空間のなかのm次元の図形とm'次元の図形の交わりが，「普通は」$m+m'-n$次元の図形になる，という事実に対応します．

ところが(13)では，2次の元xと4次の元x^2の積が0次の元q (qは変形のパラメータですから，数のようなものです)になってしまっています．

$2+4\neq 0$ですから，コホモロジーの次数が，量子カップ積で保たれないのです．量子カップ積がコホモロジーの次数を保つような空間を考えていくと，カラビ-ヤウ多様体に行き着きます．

射影平面$\mathbb{C}P^2$のときにコホモロジーの次数が量子カップ積で保たれない，ということの理由を説明します．$\mathcal{M}_d(\mathbb{C}P^2)$で射影平面の$d$次の有理曲線全体の集合とします．このとき，

$$\dim \mathcal{M}_d(\mathbb{C}P^2) = 6d-2. \tag{26}$$

(26)は次のようにして示されます．射影平面のd次の有理曲線はd次多項式f,g,hをつかって，(18)のように表される写像φの像になっています．f,g,hは係数で決まり，d次多項式の係数は$d+1$個あります．つまり，複素数$3d+3$個分の自由度があります．

しかし，f,g,hを一斉に定数倍しても，得られるφは変わりません．つまり，φの自由度は複素数$3d+2$個分です．

最後に，写像φを定義域$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$の複素解析的な座標変換で変えても，有理曲線は変わりません．リーマン球面$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$の複素解析的な座標変換は，1次分数変換$z\mapsto(az+b)/(cz+d)$であらわされます．これは4つの複素数a,b,c,dで決まりますが，a,b,c,dを一斉に定数倍しても同じ1次分数変換ですから，1次分数変換の自由度は複素数3個分です．

これを引くと，射影平面のd次の有理曲線の自由度は$2(3d-1)$になり(26)が得られます．

さて，(26)で注目すべきなのは，右辺がdによって変わることです．$d=0$の場合が普通のカップ積であったことを思い出すと，「(26)の右辺がdによって変わる」ということが，量子カップ積が次数を保たない，ということを意味することが分かります．

さて，それでは$\mathbb{C}P^2$を一般化して，Xを考えたとき，$\dim\mathcal{M}_d(X)$がdに

10）ただし，「数」というのは微妙で，dが大きいときには，必ず，「重根」や「無限遠の根を数えること」にあたる問題が起こり，数えるということが何を意味するかしっかりと決めなければいけません．「シューベルトの数え上げ幾何学の厳密な基礎付け」というヒルベルトの第15問題は，同様な状況で，数えるということが何を意味するか，という問いに関わっています．

11）これは量子コホモロジー環の積が結合法則を満たす，という事実を少し一般化したものです．

よらないための条件を考えてみましょう．

ここでは，4次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^4$ のなかの(複素)超曲面だけを考えることにします．まず

$$\dim \mathcal{M}_d(\mathbb{C}P^4) = 10d+2 \tag{27}$$

です．これは

$$\varphi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}P^4$$

なる d 次の写像が，φ が

$$\varphi = \left(\frac{h_1(z)}{h_0(z)}, \cdots, \frac{h_4(z)}{h_0(z)}\right) \tag{28}$$

($h_0, h_1, \cdots, h_4$ は d 次式)と表されることから，(26)と同様にして確かめられます．

4変数の m 次多項式，例えば，

$$x^m+y^m+u^m+v^m = 1 \tag{29}$$

で表される，$\mathbb{C}P^4$ のなかの(複素)超曲面を X_m とし，$\mathcal{M}_d(X_m)$ の次元を計算します．$X_m \subset \mathbb{C}P^4$ ですから，$\varphi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to X_m$ はやはり(28)のように表されます．(28)の φ の像が X_m に含まれる条件は

$$\left(\frac{h_1(z)}{h_0(z)}\right)^m + \cdots + \left(\frac{h_4(z)}{h_0(z)}\right)^m = 1$$

が z の恒等式として成り立つことです．分母を払うと

$$(h_1(z))^m + \cdots + (h_4(z))^m = (h_0(z))^m. \tag{30}$$

さて $h_1, \cdots, h_4, h_0$ は d 次の多項式で，それらの係数たち($5(d+1)$ 個あります)が φ を決めていました．

(30)は z に関する，md 次式です．その係数は $md+1$ 個あり，それらは $h_1, \cdots, h_4, h_0$ の係数で表されています．したがって，(30)は $h_1, \cdots, h_4, h_0$ の係数の間に $md+1$ 個の条件式を与えることになります[12)]．したがって，$\mathcal{M}_d(X_m)$ の次元は，$\mathcal{M}_d(\mathbb{C}P^4)$ の次元より $2(md+1)$ 減ることになり，結局

$$\dim \mathcal{M}_d(X_m) = (10-2m)d$$

になります．これが d によらないのは，$m=5$ のとき，つまり5次超曲面(クインティック)の場合です．まとめると，

定理 6.1 $\mathbb{C}P^4$ の超曲面の量子カップ積が次数を保つのは，5次超曲面の場合である．

1章で，5次超曲面の場合の有理曲線の数え上げへの応用によって，ミラー対称性研究が数学者に注目されるようになったことが説明されました．5次超曲面がミラー対称性研究で重要な理由の1つには定理6.1があります．

さて5次超曲面はカラビ-ヤウ多様体の典型例です．カラビ-ヤウ多様体はリッチ曲率が0であるケーラー多様体です．定理6.1の結論とリッチ曲率がどう結びつくかを少しだけ述べます．

定理6.1のこの節の説明では，有理曲線を表す多項式写像の係数の数とそれが満たすべき方程式の数を数えて，次元を計算しました．これは(有理変数の)多項式を使って，$\mathcal{M}_d(X_m)$を表していることになります．

もっと微分幾何学的なやり方をする場合には，$\mathcal{M}_d(X_m)$を微分方程式を使って表します．この場合は(非線形)コーシー-リーマン方程式です．その未知変数の数(実は無限大です．写像空間ですから)から，方程式の数(これもある写像が0という方程式ですから無限大)を「引いたもの[13]」という概念を，正当化できれば，それで$\mathcal{M}_d(X_m)$の次元を計算できます．そのような正当化をしているのが，アティヤー-シンガーの指数定理です．アティヤー-シンガーの指数定理は，「無限大-無限大」を空間の曲率に関わる量(特性類)を使って計算します．我々の場合にどの曲率が現れるかを考えると，リッチ曲率が現れることが分かります．

もう少し付け加えましょう．アティヤー-シンガーの指数定理で出てくるのは，曲率そのものというよりは，曲率が定める特性類が表すコホモロジー類です．このコホモロジー類は(概)複素構造で決まり，計量によりません．$\mathcal{M}_d(X_m)$の次元の計算に出てくるのはX_mの第1チャーン類です．リッチ曲率が0ならば第1チャーン類は0になります．第1チャーン類が0であるようなケーラー多様体には，必ずリッチ曲率が0のケーラー計量がある，というのがカラビの予想で，これを証明したのがヤウです．カラビ-ヤウ多様体という名前がついているのは，そのためです．

最後に我田引水の引用文献をあげます．

12) それらの条件式がすべて独立であることは確かめる必要がありますが．

13) それは有限の数になる．

参考文献

［1］ 深谷賢治,『これからの幾何学』, 日本評論社, 1998 年.

［2］ http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/
に置いてある, 1997 年の静岡大学の講義録(横山美佐子さんによる.)

［3］ 深谷賢治,『シンプレクティク幾何学』, 岩波書店, 1999 年.

［4］ 中島啓(編),『微分幾何学の最先端』, 培風館, 2005 年.

［ふかや けんじ］

3 正多面体とミラー対称性

高橋篤史
[大阪大学大学院理学研究科]

1 はじめに

この章では正多面体と特異点の関連性にかかわる話題を解説したいと思います．そこで，次の問題を考えることから始めましょう：

問題 1 不等式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1 \tag{1}$$

をみたす正の整数の組 (p,q,r) をすべて求めよ．

この問題の答えは，

$$(p,q,r)=\begin{cases}(m,l-m+1,1), & 1\leqq m\leqq l\\ (l-2,2,2), & 4\leqq l\\ (3,3,2),(4,3,2),(5,3,2) & \end{cases} \tag{2}$$

と簡単に求まりますね．しかし，この単純な事実が多くの深い数学的現象を統制しているのです[1)]．

正多面体は2000年以上も前から，正多面体と特異点の関係はおよそ100年ほど前から研究されています．一方で，この本のテーマであるミラー対称性という，超弦理論とも関連した最先端の理論の観点からも，それらはまだ充分研究の余地がある深い対象です．ですから，初歩的な内容からきわめて専門的な内容まで，数学に興味をもつ人すべてが親しみ楽しめる内容があります．そこで，5章，11章とは雰囲気を変えて，初等的な話題か

1） ADE **分類**型定理の証明は，それぞれの内容に関する不変量を経由して，この不等式を解くことに帰着されます．

ら解説を行おうと思います．

2　正多面体の分類

まずは正多角形の復習から始めましょう．

定義 2　平面上の閉じた凸多角形で，その辺と内角それぞれすべて合同であるものを**正多角形**とよぶ．とくに，辺の数を n とするとき，正 n 角形とよぶ．

正 n 角形には，すべての頂点を通る円(**外接円**)と，すべての辺に接する円(**内接円**)があります．このふたつの円の中心は一致するので，それを正 n 角形の**中心**と呼びます．正 n 角形の内角は $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\cdot 180°$ ですね．通常，「内角は 0° より大きい」と考えますが，$n=2$ も含めて考えるほうが自然なので，$n \geqq 2$ とします．

次に，正多面体の定義を与えます．

定義 3　各面が互いに合同な正多角形であり，各頂点のまわりに同じ数の面が集まっている 3 次元空間内の閉じた凸多面体のことを**正多面体**とよぶ．とくに，面の数を n とするとき，正 n 面体とよぶ．

どのような n に対して正多面体が存在するのかを調べましょう．各面が正 p 角形で，それが各頂点のまわりに q 個集まっているとします．すると，凸多面体であるという条件から，多面体の 1 つの頂点に集まる正 p 角形の内角の総和を考えると

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)\cdot 180°\cdot q < 360° \tag{3}$$

が成立しなくてはなりません．この式を変形すると

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2} > 1$$

となります．したがって，正多面体が存在する必要条件としての (p,q) の

組み合わせは，

$$(p,q)=\begin{cases}(p,2),\ (2,q),\\(3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,3),\ (5,3)\end{cases}\tag{4}$$

に限られることがわかります．逆に各 (p,q) の組 $(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$ に対して，それぞれ正四面体・正八面体・正二十面体・立方体・正十二面体が対応します．また，組 $(2,p,2)$ および $(2,2,q)$ に対しては，それぞれ正 p 角形を 2 枚および「正 2 角形」を q 枚貼り合わせてできる，「潰れた多面体」を考えることにします．一見奇妙な対象ではありますが，不等式(1)の解の分類の観点と合わせて考えると，これも含めるほうが自然だと思えるでしょう．ここで，p と q の役割を交換することは正多面体の頂点と面(の中心)の役割を交換することである，ということに注意しましょう．このような操作を**双対多面体**をとると言います．これから考える対象はこの操作について不変なものだけを考えるので，以下では $p \geqq q$ とします．

正多角形には，外接円と内接円がありました．同様に，正多面体にはすべての頂点を通る球(**外接球**)とすべての面の中心を通る球(**内接球**)があることが簡単に証明できます[2)]．外接球と内接球の中心は一致するので，それを正多面体の**中心**と呼びます．正多面体はすべての面が合同であるため，とても「対称」な図形です．このことをもう少し数学的に表現しましょう．

> **定義 4** 各頂点・辺・面の位置が変わっても，正多面体全体としてはもとの正多面体と同じ位置にとどまるような操作のことを正多面体の**対称性**とよぶ．

ここでは空間の回転によって引き起こされる対称性(回転対称性)に着目しましょう．すると，次のことがわかります．

- 正多面体を 2 回回転させても，それは 1 回の回転であらわせる．
- 正多面体を 1 回回転させて，この回転と「逆の」回転を施すと元に戻る．

2) 座標を用いて正多面体を記述するとわかりやすいでしょう．

これに，正多面体を「まったく回転させない」というのも回転対称性のひとつとして考える，という規則を定めます．すると，これは**群**と呼ばれる数学的概念になっています[3)]．群というのは「対称性」を数学的に理解するために導入されたもので，ここで得られる正多面体の回転対称性のことを，とくに**正多面体群**といいます．頂点の数が有限個であることを考えると，正多面体群は有限個の元(対称性)からなる群である，すなわち有限群であることがわかります．

3　正多面体群

初等幾何学的考察で，正多面体群を３次元ユークリッド空間における回転対称性全体のなす群の一部として導入しました．より正確にいうと，正多面体群は**特殊直交群** $SO(3)$ の有限部分群となっています．実は逆の関係も知られていて，$SO(3)$ の有限部分群は巡回群 $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ とこれらの正多面体群のみであることが知られています．

具体的に正多面体群を記述しましょう．地球の自転を想像していただくとよいと思いますが，空間回転を与えることと回転の軸(地球の例では北極と南極を結ぶ地軸)を与えることとは同じことです．正多面体の回転対称性を与える回転軸は外接球を地球と思って，どの点が北極や南極になりうるかを調べれば求まり，次の３通りの可能性があることがわかります：

- 回転軸は頂点と正多面体の中心を結ぶ直線．
- 回転軸は辺の中点と正多面体の中心を結ぶ直線．
- 回転軸は面の中心と正多面体の中心を結ぶ直線．

これを用いて，正四面体の場合にもう少し詳しく回転対称性を調べてみましょう．図１からわかるように，回転軸は２種類あります．中点を通る回転軸のまわりで 180° 回転させる操作を c という文字で，頂点を通る回転軸のまわりで 120° 回転させる操作を b という文字であらわすことにします[4)]．また，回転を組み合わせることを通常の掛け算のように積で，「回転させない」ということを(掛け算に対する単位元ということで) 1 であらわすことにします．すると，回転軸と回転角度を考えることで，$c^2 = 1 = b^3$

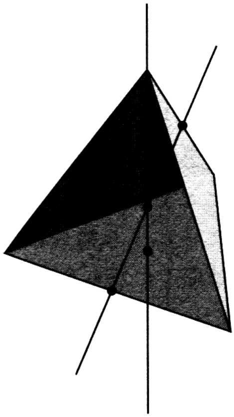


図1 正四面体の2種類の回転軸

および $(bc)^3=1$ が容易に導かれます．$a := (bc)^{-1}$ とおくと，**生成元と関係式であらわされる群**

$$\langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^2 = abc = 1 \rangle \tag{5}$$

から正多面体群への対応(群準同型)ができます．さらに幾何学的な考察を用いると，これが群として同じもの(群の同型)を与えることが証明できます[5]．

注意したいのは，生成元 a, b, c のべき指数に $(3,3,2)$ という，正多面体の分類の際に出てきた組が再び登場しているということです．これは偶然ではありません．実際，上に概略を述べた正四面体群のときと同様に，組 $(p,q,2)$ で特徴づけられる正多面体群は

$$\langle a, b, c \mid a^p = b^q = c^2 = abc = 1 \rangle \tag{6}$$

という，生成元と関係式による表示を持ちます．

3) 省略しましたが，積の合成則も明らかに成り立っています．

4) 回転の向きに関しては記述を省略しました．適切に補って以下の議論を完成してみましょう．

5) 残念ながらここでは述べることができません．興味がある方は，がんばって証明をつけてみましょう．

4　軌道空間

正多面体群の任意の元は回転対称性，つまり特殊直交群 $SO(3)$ の元なので，とくにその外接球を外接球にうつします．すると，正多面体群の作用による外接球の**軌道空間**[6] を考えることができます．ここで軌道空間とは，群の元により移りあう(外接球面上の)点を同一視することにより得られる図形のことです[7]．これは「特別な 3 点で尖っている球面」になります．

このことを少し具体的に説明してみましょう．式(6)による正多面体群の記述から，辺の中点を結ぶ回転軸と外接球が交わる点は，$c^2=1$ となる元 c で固定されることがわかります．また，回転軸のすぐ近くの点は正多面体群のどの元に対しても別の点に写されることもわかります．つまり，元 c で固定される点に対応した軌道空間の点はあたかも「1/2 点」である，つまりその点の周りの角度の総和が 360° ではなく半分の 180° となっているような尖った点である，と理解することができます．同様に，a, b について考えると，「$1/p$ 点」および「$1/q$ 点」が得られます．

5　軌道空間の代数的記述

尖った 3 点をもつ球面の代数幾何学的記述を少し与えます．球面を射影直線 $\mathbb{P}^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ とみなしたとき，その上の任意の 3 点を正則自己同型(1 次分数変換)によって $0, \infty, 1$ に写すことができます．したがって，尖った 3 点はそれぞれ $0, \infty, 1$ にあり，それぞれ「$1/p$ 点」，「$1/q$ 点」，「$1/r$ 点」となっていると仮定できます．このとき，この軌道空間 $\mathbb{P}^1_{p,q,r}$ は

$$X_{p,q,r}:=\{Z_0^p-Z_1^q+Z_2^r=0\}\subset\mathbb{C}^3 \tag{7}$$

$$\mathbb{P}^1_{p,q,r}\cong[X_{p,q,r}\backslash\{0\}/G_{p,q,r}] \tag{8}$$

とあらわせます[8]．正確にしようとするとかなり専門的な内容を含みますが，できるだけ簡単に上の式の意味を説明したいと思います．

射影平面 $\mathbb{P}^2:=\mathbb{C}^3\backslash\{0\}/\mathbb{C}^*$ の 1 次超曲面

$$z_0-z_1+z_2=0, \qquad [z_0, z_1, z_2]\in\mathbb{P}^2$$

があらわす部分図形(部分多様体)は射影直線 $\mathbb{P}^1$ と同型になります．とくに，z_0/z_1 を $\mathbb{P}^1$ の座標と思うことができます．したがって，$z_0:=Z_0^p$,

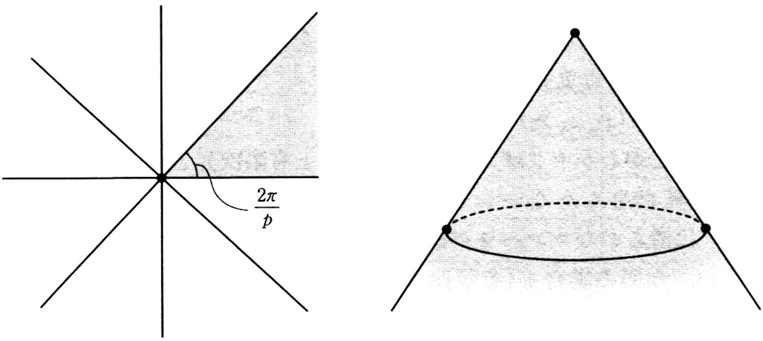


図 2 $a^p=1$ となる元 a で固定される点の周りの様子

$z_1:=Z_1^q$, $z_2:=Z_2^r$ と変数変換することで，$\mathbb{P}^1_{p,q,r}$ は $\mathbb{P}^1$ だと思うことができます[9]．さらに，点 $[Z_0,Z_1,Z_2]=[0,1,1]\in\mathbb{P}^1_{p,q,r}$ は $\mathbb{P}^1$ の原点に対応し，$x=X^p$ という変数変換の性質より，「$1/p$ 点」であることがわかります．同様に，点 $[1,0,-1]$, $[1,1,0]$ もそれぞれ $\infty\in\mathbb{P}^1$ にある「$1/q$ 点」，$1\in\mathbb{P}^1$ にある「$1/r$ 点」であることがわかります．

軌道空間 $\mathbb{P}^1_{p,q,r}$ を組 (p,q,r) の情報のみで簡単に記述できる，ということが少し伝わったでしょうか？

6 孤立超曲面特異点と軌道空間

さて，ここで一見異なる内容の話をします．3 変数の(重み付き)斉次孤

6) **軌道体**(orbifold)と呼びたいのですが，11 章「特異点とミラー対称性」におけるランダウギンツブルグ軌道体模型と区別するために，用語を変えています．

7) これから述べることを正確に理解するには，比較的高度な知識と理解が必要となります．例えば，通常の**代数多様体**としては軌道空間は $\mathbb{P}^1$(球面)ですが，これから説明する「尖った点」に対する付加的データを付け加えた，**代数的スタック**として考察するほうがより自然です．

8) $G_{p,q,r}$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ の $\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ による拡大として得られる可換群で，括弧 [ ] は代数多様体としての商でなく商スタックを意味します．

9) 議論を正確にするには，$G_{p,q,r}$ と $\mathbb{C}^*$ の対応およびこれらの多項式環への作用を考察する必要があります．

立超曲面特異点 $f(x_1, x_2, x_3)$ を考えます[10]．このとき，変数 x_1, x_2, x_3 および多項式 f はそれぞれ次数 a_1, a_2, a_3 および h をもつことから，自然に $\mathbb{C}^*$ が $\mathbb{C}^3$ および f の零点集合

$$X_f := \{f(x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

に作用することがわかります．ヤコビ環が $\mathbb{C}$ 上有限次元ということから，$X_f \backslash \{0\}$ は特異点をもたないことが示せるので，$\mathbb{C}^*$ による商空間 $C_f := X_f \backslash \{0\} / \mathbb{C}^*$ は滑らかなコンパクトリーマン面の構造をもちます．

ところが，今回の場合も（有限個の）$\mathbb{C}^*$ の元で固定される X_f の点があります．したがって，球面への正多面体群の作用を考えたときと同様に，軌道空間

$$\mathscr{C}_f := [X_f \backslash \{0\} / \mathbb{C}^*] \tag{9}$$

を考えるのが自然です．この軌道空間 $\mathscr{C}_f$ は，リーマン面 C_f に複数の尖った点の情報を付け加えたものと考えてください．

7 不思議な対応

これまで，2種類の軌道空間 $\mathbb{P}^1_{p,q,r}$ と $\mathscr{C}_f$ を導入しましたが，これらの間にはきわめて密接な関係があるのです．実は，次のようなことが成り立ちます．

定理 5 正の整数の組 (p, q, r) に対し，$\mathbb{P}^1_{p,q,r}$ と $[\mathscr{C}_f / G'_f]$ が軌道空間として同型となるような特異点 f および有限群 G'_f が存在する[11]．

より精密には，（次数付き）環 $\mathbb{C}[Z_0, Z_1, Z_2] / (Z_0^p - Z_1^q + Z_2^r)$ に対して，$C[x, y, z]/(f)$ と同型な部分環を系統的に構成できるのです．

具体例を挙げましょう．$1/p + 1/q + 1/r > 1$ とします．このとき f は次ページの表のように選べます：

これらは **ADE 特異点**と呼ばれ，もっとも基本的かつ重要な特異点のクラスです．

軌道空間を経由することで，正多面体群と D・E 型の特異点が対応するという，不思議な関係が得られました．この不思議な関係を最初に発見・

(p,q,r)	f	型
$(m,l-m+1,1)$	$x^{l+1}+yz$	A_l
$(l-2,2,2)$	$x^{l-1}+xy^2+z^2$	D_l
$(3,3,2)$	$x^4+y^3+z^2$	E_6
$(4,3,2)$	$x^3+xy^3+z^2$	E_7
$(5,3,2)$	$x^5+y^3+z^2$	E_8

研究したのがクラインです．そのため，ADE 特異点を**クライン特異点**と呼ぶこともあります．

8　ミラー対称性との関連

これまでのところ，一見ミラー対称性は見えてこないと思います．しかし，定理 5 の背後に，ミラー対称性は隠れています．整数の組 (p,q,r) に対して特異点と有限群の組 (f,G'_f) が対応しましたね．11 章の記号とは逆になっていますが，$G_f := G'_f\times\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ としたとき，(f,G_f) と $(f^*,\{1\})$ が位相的ミラー対をなすような特異点 f^* が存在するのです．実際，特異点 f^* に対する深谷圏 $D^bLag(f^*)$ は格別な基底からなる exceptional collection により生成される[12]，という事実こそが，定理 5 の証明における隠れたアイデアです[13]．

また，組 (f,G_f) に対して，軌道空間上の連接層の導来圏 $D^b(\mathrm{coh}\,X_{p,q,r}) = D^b(\mathrm{coh}\,[\mathscr{C}_f/G'_f])$ および D-ブレーンの圏 $\mathcal{T}_{f,G_f}$ を考えることができますが，これらはきわめて密接に関係していて，

$$\mathcal{T}_{f,G_f}\subset D^b(\mathrm{coh}\,X_{p,q,r}),\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$$

$$\mathcal{T}_{f,G_f}\simeq D^b(\mathrm{coh}\,X_{p,q,r}),\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$$

10）これも 11 章を参照してください．

11）群 G'_f は組 (p,q,r) に応じて代数的に定まります．以下の例では G'_f は単位元のみからなる自明な群とできます．

12）用語等は 11 章を参照してください．

13）証明自身は純粋に代数的・組み合わせ論的なものです．

シンプレクティック	複素
$x^p+y^q+z^r-xyz$	$X_{p,q,r}$
$H_2(X_1, \mathbb{Z})$ 中間ホモロジー群	$K_0(X_{p,q,r})$ グロタンディーク群
$-I$ I：交差形式	$\chi+{}^t\chi$ χ：オイラー形式
c ミルナーモノドロミー	$-[S] \in \mathrm{Aut}(K_0(X_{p,q,r}))$ （S：セール函手）

$$D^b(\mathrm{coh}\, X_{p,q,r}) \subset \mathcal{T}_{f,G_f}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$$

という性質が成り立つことがわかっています[14]．

ADE 特異点の場合に具体的に説明しましょう．これは $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1$ のときなので，$\mathcal{T}_{f,G_f} \subset D^b(\mathrm{coh}\, X_{p,q,r})$ です．圏 $\mathcal{T}_{f,G_f}$ は，11 章で少し触れますが，対応する型のディンキン箙（えびら）の導来圏となります．そして，$D^b(\mathrm{coh}\, X_{p,q,r})$ は対応する型の**拡大ディンキン箙**の導来圏となり，ディンキン図形を拡大するときに追加する頂点を，新たに生成元として $\mathcal{T}_{f,G_f}$ に付け加えてできる圏となっています．

ところで，圏 $\mathcal{T}_{f,G_f}$ はホモロジー的ミラー対称性により深谷圏 $D^b Lag(f^*)$ と同値になるべき圏でした．ということは，$D^b(\mathrm{coh}\, X_{p,q,r})$ に対応する深谷圏もあるはずだ，そして，それは組 (p, q, r) のみにより特徴づけられる特異点で記述されるはず，とは思いませんか？　実は，**カスプ特異点**と呼ばれる孤立超曲面特異点

$$g(x, y, z) := x^p+y^q+z^r-xyz$$

に対して，ホモロジー的ミラー対称性

$$D^b(\mathrm{coh}\, X_{p,q,r}) \cong D^b Lag(g)$$

が期待され，$r=2$ の場合には正しいことがわかっています．一般の場合でも，11 章で述べる対応（上の表を参照）が成り立つことは，表現論と特異点論の結果を見比べることで，すぐに確かめることができるのです．

9 消滅サイクルの記述

驚くべきことに，$r=2$ の場合には，特異点論の古典的手法を用いて深谷圏 $D^b\,Lag(g)$ の構造を完全に決定できるのです．まず，

$$x^p+y^q+z^2-xyz = x^p+y^q-\frac{1}{4}x^2y^2+\left(z-\frac{xy}{2}\right)^2$$

と変形できることに注意します．そして，深谷圏は特異点の定義多項式にある変数の 2 乗を加えても変化しないというサイデル氏の定理を用いると，特異点 $x^p+y^q-x^2y^2/4$ の深谷圏を調べることに問題は帰着されます．最も重要なことは，2 変数の多項式の零点を調べる問題のため，実平面上に絵を描くことで特異点を理解できるようになることです．

ここからは，$(p,q,r)=(2,2,2)$ というもっとも簡単な具体例で話をします．消滅サイクルをうまく記述するために，$x^2+y^2-x^2y^2/4$ を少し変形します．定数項 -4 を加えて

$$x^2+y^2-x^2y^2/4+(-4) = -\frac{1}{4}(x^2-4)(y^2-4)$$

とします．すると，零点は $x=\pm 2$, $y=\pm 2$ となります．特異点 $(\pm 2, \pm 2)$ に対応する消滅サイクル 4 個と函数 $-\frac{1}{4}(x^2-4)(y^2-4)$ の極小値に対する臨界点 $(0,0)$ に対応する消滅サイクル 1 個を，図 3 から読み取ることができます．これらの間の交叉の状況，箙の矢を引く規則，は次のように求まります[15]：

- 特異点から特異点および臨界点から臨界点には矢印を引かない．
- 特異点から極小値に対する臨界点に向けて 1 本矢印を引く．

すると，$D4$ 型の拡大ディンキン箙が得られます(図 4)．
また，消滅サイクルのうちひとつ(例えば，特異点 $(2,2)$ に対応するもの)

14） とくに，$\mathcal{T}_{f,G_f}$ と $D^b(\mathrm{coh}\,X_{p,q,r})$ の「差」は，有限個の exceptional collection で生成される圏となることもわかります．

15） 一般の場合は，この規則に加えて，極大値に対する臨界点に関する規則などを導入することで，特異点 g から箙(と関係式)を得る処方箋を与えることができます．

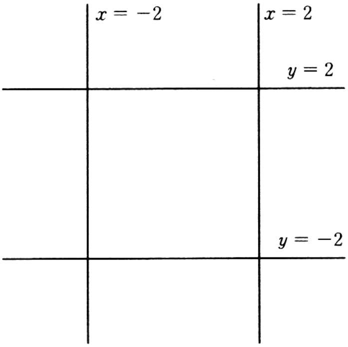


図 3　零点集合

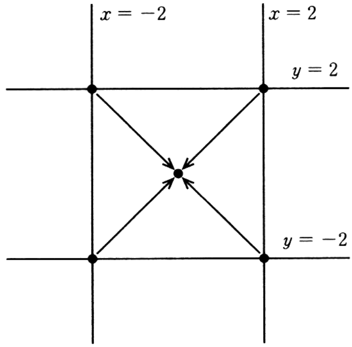


図 4　D_4 型の拡大ディンキン箙

を「無限遠」に動かすような，さらなる変形を考えると(図 5)，D_4 型特異点 $-xy(x+y)$ の変形[16)]

$$-(x+2)(y+2)(x+y)$$

が得られます．これに対しても上の規則を適用すると，D_4 型のディンキン箙が得られます．ここで説明したことを正確に述べると，ホモロジー的ミラー対称性予想

$$\mathcal{T}_{x^3+xy^2+z^2,\,\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \cong D^b\,Lag(x^3+xy^2+z^2) \tag{10}$$

$$D^b(\mathrm{coh}\,X_{2,2,2}) \cong D^b\,Lag(x^2+y^2+z^2-xyz) \tag{11}$$

の証明となります．一般の $(p,q,2)$ に対するホモロジー的ミラー対称性予想も，ほぼ同様に示されます．

ここで述べた，実平面に描かれた零点の絵から消滅サイクルとその交叉を調べるアイデアは，アカンポ氏によって約 30 年前に導入されたものです．特異点の代数学と幾何学をつなぐ決定的な鍵になるとは，その当時おそらく想像できなかっただろうと思います．この鍵により，正多面体群・軌道空間・特異点・(拡大)ディンキン図形の間にある不思議な関係(**マッカイ対応**)を自然に説明する，ADE 特異点のホモロジー的ミラー対称性(圏同値(10)および(11)が証明され，新たな世界への扉が開かれました．

10　おわりに

この解説で説明しなかった $1/p+1/q+1/r<1$ の世界には，正多面体群

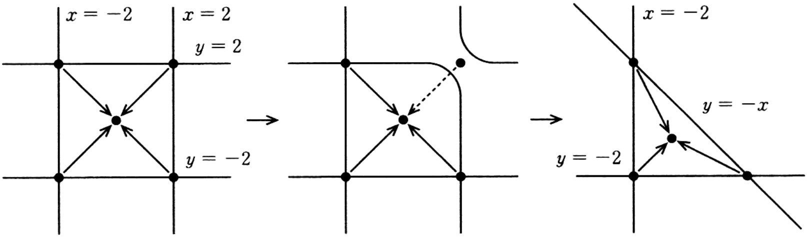


図5 拡大ディンキン箙からディンキン箙へ

の一般化ともみなせる**シュバルツの三角群**の理論や ADE 特異点のちょうど「裏側」にある**アーノルドの例外型特異点**など，まだその全貌が明らかでないとても興味深い数学があります．ミラー対称性とそこで日々開発されている研究手法により，これらの理解が飛躍的に進むことを期待しています．

［たかはし あつし］

16） 簡単のため，x^3+xy^2 を適当に変数変換しています．

4 カラビ-ヤウ多様体と代数幾何

並河良典
[京都大学大学院理学研究科]

1　代数多様体の分類とカラビ-ヤウ多様体

ここでは，代数多様体全体の中でカラビ-ヤウ多様体がどのような位置付けにあるのかを説明する．以下，とくに断らないかぎり，代数多様体とは，複素射影空間に閉集合として埋め込まれ，特異点をもたないものに限ることにする．射影空間には，フビニ-スタディ計量とよばれるケーラー計量が入るので，それを制限することによって，代数多様体はケーラー多様体になる．カラビ-ヤウ多様体 X とは，標準束 K_X が自明な代数多様体のことである．X をカラビ-ヤウ多様体，ω を X 上のケーラー計量とすると，$[\omega_0] = [\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ となるようなリッチ平坦なケーラー計量 ω_0 がただひとつ存在する．これは，カラビ(Calabi E.)によって予想されヤウ(Yau, S. T.)によって証明された大定理である．カラビ-ヤウ多様体という名前はこの結果に由来している．代数幾何のひとつの目標は，代数多様体にはどんな種類のものが存在するかを調べることである．以下では，代数多様体の分類理論のなかで，カラビ-ヤウ多様体がどのように現れるのか見ていくことにする．1次元の代数多様体 C は代数曲線とよばれ，種数 $g(C)$ によって，大雑把に3つのクラスに分類される．

$$g(C) = 0 \Longrightarrow C \cong \mathbb{P}^1,$$

$$g(C) = 1 \Longrightarrow C：\text{楕円曲線},$$

$$g(C) > 1 \Longrightarrow C：\text{一般型曲線}.$$

$g(C) = 0$ の場合，C の曲率は正になり，$g(C) > 1$ の場合，C の曲率は負になる．そして，$g(C) = 1$ の場合，C は平坦なケーラー計量を持ち，曲率は0になる．したがって，1次元のカラビ-ヤウ多様体は，楕円曲線にほかならない．2次元以上の代数多様体を扱うためには，**小平次元**とよばれる不変量が有効である(飯高茂，モイシェゾン)．以下，この概念について

簡単に説明しよう．代数多様体 X の余接束を Ω^1_X と書くことにする．このとき，Ω^1_X の階数は，X の次元 d に等しい．X の標準束 K_X とは，Ω^1_X を d 回外積してできた直線束 $\wedge^d \Omega^1_X$ のことである．自然数 $n>0$ に対して，$(K_X)^{\otimes n}$ の大域的切断全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\Gamma(X, (K_X)^{\otimes n})$ であらわそう．$\Gamma(X, (K_X)^{\otimes n})$ の基底を $s_0, \cdots, s_m$ とすると，X から，m 次元射影空間 $\mathbb{P}^m$ への有理写像

$$\phi_n : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$$

が，

$$\phi_n(p) := (s_0(p) : s_1(p) : \cdots : s_m(p)) \in \mathbb{P}^m$$

によって与えられる．もちろん，$\Gamma(X, (K_X)^{\otimes n}) = 0$ であれば，ϕ_n は定義されない．また，ϕ_n は，基底 $\{s_0, \cdots, s_m\}$ のとり方によって変わってくるが，$\mathbb{P}^m$ を $PGL(m+1)$ の適当な元で変換してやると同じ有理写像とみなすことができる．そこで，X の小平次元 $\kappa(X)$ を次のように定義する．まず，どんな $n>0$ に対しても $\Gamma(X, (K_X)^{\otimes n}) = 0$ のとき，

$$\kappa(X) = -\infty$$

と定義する．一方，$\Gamma(X, (K_X)^{\otimes n}) \neq 0$ となるような n が少なくともひとつ存在するときには，

$$\kappa(X) = \max_{n>0}\{\dim \phi_n(X)\}$$

と定義する．このとき，$\kappa(X)$ は X の双有理不変量になる．すなわち，X を双有理同値な別の X' に置き換えても小平次元は変わらない．次に，**極小モデル**の概念について説明する．代数多様体 X 上に直線束 L と曲線 C が与えられたとしよう．C の特異点解消 $h : \tilde{C} \to C \subset X$ をとり，L と C の交点数 $(L.C)$ を，

$$(L.C) = \int_{\tilde{C}} h^* c_1(L)$$

によって定義する．すべての曲線 $C \subset X$ に対して $(L.C) \geqq 0$ が成り立つような直線束 L のことを，数値的正（ネフ）とよぶ．標準束 K_X がネフであるような代数多様体 X のことを極小とよぶ．与えられた代数多様体 Y に対して，Y と双有理同値な極小代数多様体 X が存在するとき，X のことを Y の極小モデルとよぶ．2次元以上の代数多様体の分類では，この2つの概念（小平次元，極小モデル）が重要な働きをする．まずは，代数曲面の場合をみてみよう．代数曲面 S 上の曲線 C で，$(K_S.C) = -1$，$C \cong \mathbb{P}^1$ を

満たすものを(-1)-曲線とよぶ．代数曲面を点でブローアップすると例外曲線として有理曲線が現れるが，これは，(-1)-曲線である．逆に，(-1)-曲線Cを1点につぶすことによりSから新しい代数曲面S_1を作ることができる．この操作をブローダウンとよぶ．このようにして，与えられたSから出発して，順次，(-1)-曲線をつぶすことにより新たな代数曲面ができていく．

$$S \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \cdots$$

1回のブローダウンで，代数曲面の第2ベッチ数はちょうど1減るので，この操作は，有限回で終了する．小平次元$\kappa(S)$が0以上のときには，こうして最終的にできた代数曲面$\overline{S}$は，Sの極小モデルにほかならない．また，$\kappa(S) = -\infty$の場合，$\overline{S}$は，$\mathbb{P}^2$か，曲線上の線織曲面(ruled surface)とよばれるものに同型になる．ここで，$\kappa(S) = 0$の場合をもう少し詳しくみてみよう．定義から，$\dim \Gamma(\overline{S}, (K_{\overline{S}})^{\otimes n}) = 1$となる$n$が存在する．そのような$n$の中で最小のものを，$n_0$とおく．さらに，$q(\overline{S}) := \dim H^1(S, \mathcal{O}_S)$とおく．このとき，小平次元0の極小代数曲面は次のように分類される．

$$n_0 = 1,\ q = 0 \Longrightarrow \overline{S}：\text{代数的}K3\text{-曲面},$$
$$n_0 = 1,\ q = 2 \Longrightarrow \overline{S}：\text{アーベル曲面},$$
$$n_0 > 1,\ q = 0 \Longrightarrow \overline{S}：\text{エンリケス曲面},$$
$$n_0 > 1,\ q = 1 \Longrightarrow \overline{S}：\text{超楕円曲面}.$$

このうち，最初の2つは，標準束K_Sが自明になり，カラビ-ヤウ多様体である．一方，後半の2つも適当なエタール被覆をとれば，各々，代数的$K3$-曲面，アーベル曲面になるので，小平次元0の代数曲面の研究は，ある意味で，代数的$K3$-曲面とアーベル曲面という2つのカラビ-ヤウ多様体の研究に帰着されたことになる．いよいよ本題の3次元の場合を考える．残念ながら，2次元のときのシナリオはそのままでは通用しない．実際，小平次元が0以上の3次元代数多様体で，(非特異)代数多様体の範疇では極小モデルを持たない例が見つかってしまう．このような困難の中，飯高，上野健爾らによって高次元代数多様体の攻略がはじめられた．こうした土壌の上に森理論が誕生していく．高次元では，極小モデルの候補は，非特異代数多様体の中ではなく，ある種の弱い特異点を持った代数多様体の中に存在するのである．ここで，ある種の弱い特異点といったのは，$\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点($\boldsymbol{Q}$-factorial terminal singularity)と呼ばれるもののことをさ

す．そこで，極小代数多様体を次のように定義しなおす：

(特異点をもった)代数多様体 X が極小であるとは，X が $\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点のみを持ち，標準束 K_X[1] がネフであることをいう．

そして考える代数多様体を，非特異なものから $\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点をもつものに広げる．極小モデルをつくるためには，代数曲面のとき，(-1)-曲線をつぶしたように，標準束がネフであることを妨げている悪い部分多様体をつぶす必要がある．与えられた多様体の小平次元が $-\infty$ の場合，こうした部分多様体が全体を覆いつくす可能性があるが，小平次元が0以上の場合そうしたことは起こらない．特に3次元の場合，そのような部分多様体は，曲面か曲線のどちらかである．曲面をつぶした場合，でてくる多様体は再び，$\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点をもつので，この操作を続行すればよい．しかし，曲線をつぶした場合でてくる多様体は，末端特異点より悪い特異点をもつ．そのため，操作を続行するためには，単に曲線をつぶすのではなく，“その曲線を他の曲線で置き換える”改変操作が必要になる．この改変操作を，**フリップ**とよぶ．まずフリップの存在を証明することが第1の課題になる．さらに曲面をつぶすという操作では，第2ベッチ数が1ずつ減るのだが，フリップでは第2ベッチ数は変化しない．したがって，フリップの操作が有限回で終わる保証はどこにもない．このことを保証するのが2番目の課題である．このようなプログラムのことをを極小モデルプログラムとよぶ．極小モデルプログラムは，1980年台初頭，森重文，リード，川又雄二郎，ショクロフ，コラー達によって研究され，その結果，3次元ではフリップは常に存在して，無限回その操作が続くことはないことが証明された．したがって，小平次元が0以上の3次元代数多様体に対して必ず極小モデルが存在する．また極小モデルの標準束はネフというだけでなくつぎの性質をもつ．

豊富性定理(川又，宮岡洋一)　3次元極小モデル X に対して，適

1)　特異点があるため，K_X は厳密にいうと直線束ではなく $\boldsymbol{Q}$-直線束とよばれるものになる．

当な $n>0$ をとれば，$|(K_X)^{\otimes n}|$ は大域的切断で生成される．別の言い方をすれば，有理写像

$$\phi_n : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

は正則写像になる．

小平次元 0 の 3 次元極小モデル X を考えよう．X に対して，代数曲面のときと同様に，n_0 と q を定義する．復習すると，q は不正則数(irregularity)とよばれる数で，$q(X)=\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ によって定義される．まず，小平次元が 0 ということと豊富性定理をあわせると，$(K_X)^{\otimes n_0}$ が自明であることがわかる．もし $n_0>1$ であれば，次数が n_0 の有限被覆

$$\pi : Y \longrightarrow X$$

で，K_Y が自明となるようなものがとれる．このような有限被覆を次数 1 被覆(index 1 cover)とよぶ．Y は特異点つきのカラビ-ヤウ多様体である．つまり，$n_0>1$ の極小モデルを調べるには，$n_0=1$ の極小モデルと，次数 1 被覆を調べればよい．今度は，$n_0=1$ としてみよう．もし $q>0$ であれば，X の適当なエタール被覆は，3 次元アーベル多様体か，$K3$-曲面と楕円曲線の直積になる．したがって，(大雑把にいってしまうと)小平次元 0 の 3 次元代数多様体の研究は，$q=0$ で，$\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点をもつカラビ-ヤウ多様体の研究に帰着される．さらに $\boldsymbol{Q}$-分解的末端特異点をもつ 3 次元カラビ-ヤウ多様体は少し変形してやると，非特異なカラビ-ヤウ多様体になる(並河-Steenbrink)．そこで，**(狭義の)カラビ-ヤウ多様体** X を，標準束 K_X が自明で，$q(X)=0$ となる非特異代数多様体として定義しよう．

2　カラビ-ヤウ多様体はどれぐらいあるのか？

$K3$-曲面

標準束 K_S が自明で，不正則数 $q(S)$ が 0 であるような複素曲面を，$K3$-曲面とよぶ．$K3$ とは Kummer, Kähler, Kodaira の頭文字で，ヒマラヤの山である $K2$ 峰にちなんで，ヴェイユによって命名された．ここで複素曲面とは，2 次元のコンパクト複素多様体のことを意味する．したがって，我々の定義にしたがうと，代数的な $K3$-曲面は，カラビ-ヤウ多様体である．代表的な $K3$-曲面として，クンマー曲面とよばれるものがある．T を

2次元複素トーラスとする．T にはアーベル群の構造が入っており T の対合(インボルーション) ι が，$\iota(x)=-x,\ x\in T$ によって定義される．このインボルーションには固定点が16個存在するので，T を ι の作用で割った空間 $\overline{K}:=T/\langle\iota\rangle$ は16個の特異点をもつ複素曲面になる．16個の特異点は各々 $\mathbb{C}^3$ の中で

$$x^2+y^2+z^2=0$$

によって定義された超曲面の原点の近傍と同型になっている．そこで，これらの点をブローアップすると非特異な複素曲面 K を得る．これが，クンマー曲面である．もし T として射影的な複素トーラス(＝アーベル曲面)をとれば，K は代数曲面になる．2次元複素トーラスは，$\mathbb{C}^2$ をその中の格子 Λ で割ってえられる．格子を $\mathbb{C}^2$ の中でずらせば，出来上がった複素トーラスの複素構造は変形する．したがって，一般に代数的なクンマー曲面の複素構造を少し変形すると，もはや代数曲面ではなくなる．ほかにも多種多様な $K3$-曲面の構成法が知られている．たとえば，3次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ の中で，4次式

$$x^4+y^4+z^4+w^4=0$$

(ただし，$(x:y:z:w)\in\mathbb{P}^3$ は斉次座標)で定義されたフェルマー型超曲面は，代数的な $K3$-曲面になる．それでは，どれだけ多くの $K3$-曲面が存在するのだろうか？　その1つの答えが次の定理である．

定理(小平邦彦)　すべての $K3$-曲面は，変形でつながる．

証明の鍵[2]は，$K3$-曲面のモジュライ空間のなかでクンマー曲面が稠密に入っているという事実である．もう少し具体的にいうと次のようになる．$K3$-曲面 S を勝手にとってくる．このとき，S の複素構造を少し変形してやると必ずクンマー曲面になる．この結果を認めてしまうと定理の証明は容易い．つまり，2つの $K3$-曲面 S_1, S_2 をもってくると，両者ともクンマー曲面に変形できる．2つのクンマー曲面は必ず変形でつながる(対応する複素トーラスを変形でつなげればよい)ので，もとの S_1 と S_2 も変形でつな

2)　小平による原証明は，ここの方法とは異なり楕円曲面をもちいる．

がったことになる．

最後に $K3$-曲面 S の位相不変量を計算しておこう．まず，セールの双対定理から，

$$h^2(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, K_S) = 1$$

が成立する．また仮定から，$h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ だから，

$$\chi(S, \mathcal{O}_S) := \Sigma_i (-1)^i h^i(S, \mathcal{O}_S)$$

と定義すると $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 2$ が成り立つ．一方，リーマン-ロッホの定理から，

$$\chi(S, \mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(c_1(S)^2 + c_2(S))$$

である．ここで，$c_i(S)$ は，i 次のチャーン類をあらわす．K_S が自明なので，$c_1(S) = 0$ である．$c_2(S)$ は，S のオイラー数 $e(S)$ に一致するから，上の等式から $e(S) = 24$ であることがわかる．また，$b_1(S) = 0$, $b_2(S) = 22$ であることも容易にチェックできる．

3 次元カラビ-ヤウ多様体

ここでは，狭い意味でのカラビ-ヤウ多様体 X を考える．3 次元の場合のリーマン-ロッホの定理を書いてみると

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{24} c_1(X) \cdot c_2(X)$$

となるが，$c_1(X) = 0$ なので，$\chi(\mathcal{O}_X) = 0$ であることがわかるだけで，$K3$-曲面のときのように位相不変量に関してはなんの情報も得られない．また，X の複素構造を少し変形しても代数多様体のままである．実際，X はケーラー多様体なので少し変形してできた複素多様体 X_t も依然ケーラーのままである．また $q(X) = 0$ なのでセールの双対性定理から $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ である．したがって，$H^2(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$ である．次のことを証明しよう．

Y をコンパクトケーラー多様体で，$H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ を満たすものとする．このとき，Y は射影空間に埋め込める．

Y のケーラー形式を ω とする．必要ならば，このケーラー形式を少しずらして取り直すことにより $[\omega] \in H^2(Y, \mathbb{Q})$ と仮定してよい．ホッジ理論により 2 次のコホモロジーは

$$H^2(Y, \mathbb{C}) = H^0(Y, \Omega_Y^2) \oplus H^1(Y, \Omega_Y^1) \oplus H^2(Y, \mathcal{O}_Y)$$

の形に直和分解する．またホッジ対称性から，$H^2(Y, \mathcal{O}_Y)$ と $H^0(Y, \Omega_Y^2)$ は互いに複素共役となり，この場合両方ともゼロである．以上のことから，適当な自然数 n をとれば

$$[n \cdot \omega] \in H^2(Y, \mathbb{Z}) \cap H^1(Y, \Omega_Y^1)$$

が成立する．右辺は，Y のピカール群 $\mathrm{Pic}(Y)$（$=Y$ 上の正則直線束の同型類全体のなす群）に一致するので，$[n \cdot \omega]$ に対応して，曲率が正の直線束 L がみつかる．このとき，小平の埋め込み定理により，Y は射影空間に埋め込まれる．最後に Y を X_t とおけばよい．以上の考察から，$K3$-曲面と3次元カラビ-ヤウ多様体とでは大分，事情が異なっていることがわかる．いくつか例をみていくことにしよう．

（1）（キャンデラス(Candelas, P.)達の例）：4次元射影空間 $\mathbb{P}^4$ の中で，5次式

$$f := x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0$$

（ただし，$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^4$ は斉次座標）で定義されたフェルマー型超曲面を，X とおく．X は3次元単連結カラビ-ヤウ多様体で，至るところ消えない3型式は，留数型式

$$\omega := \mathrm{res}(\Sigma_{0 \leq i \leq 4}(-1)^i x_i \, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_4 / f)$$

で与えられる．$e(X)$ を X のオイラー数とすると $e(X) = -200$ である．ここで，

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} := \{1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4\}$$

（ζ は1の原始5乗根）を5個直積した群 $H := (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\oplus 5}$ を考える．$(\zeta^{i_0}, \cdots, \zeta^{i_4}) \in H$ は，$\mathbb{P}^4$ に

$$(x_0 : \cdots : x_4) \longrightarrow (\zeta^{i_0} x_0 : \cdots : \zeta^{i_4} x_4)$$

の形で作用する．ここで，$(x_0 : \cdots : x_4)$ は斉次座標なので，実際には，H を部分群

$$D := \{(\zeta^i, \cdots, \zeta^i) \in G \,;\, 0 \leqq i \leqq 4\}$$

で割った群 H/D が $\mathbb{P}^4$ に作用する．明らかにこの作用は X の作用をひきおこす．また，H の中で3型式 ω を保つ元全体は，部分群

$$\widehat{G} := \{(\zeta^{i_0}, \cdots, \zeta^{i_4}) \in H \,;\, i_0 + i_1 + \cdots + i_4 \equiv 0 \mod 5\}$$

に一致する．$\widehat{G}$ は D を含んでいることに注意して $G := \widehat{G}/D$ とおく．このとき商空間 X/G は，特異点をもったカラビ-ヤウ多様体になる．X/G は，

4次元の(特異点をもった)代数多様体 $\mathbb{P} := \mathbb{P}^4/G$ の反標準因子(anti-canonical divisor)になっている．射影空間 $\mathbb{P}^4$ は，斉次座標からきまる自然な4次元(代数的)トーラスの作用をもち，**トーリック多様体**になる．また，G-作用はこのトーラス作用と共変なので，$\mathbb{P}$ もトーリック多様体になる．トーリック多様体の特異点解消は，組合せ論的なデータで記述されるので非常によくわかるというメリットがある．さらにこの場合，X/G の特異点解消を器(ambient space)であるトーリック多様体の特異点解消と同時におこなうことができる．その結果，X/G の特異点解消として新たな単連結カラビ-ヤウ多様体 Y を得る．このとき，Y のオイラー数は200となる．もっと状況を一般化して，適当な条件を満たすトーリック多様体の反標準因子として，特異カラビ-ヤウ多様体を構成し，それを特異点解消することができる(Batyrev)．この方法で，何百種類もの，異なった位相をもつカラビ-ヤウ多様体が構成されている．

(2) (シェーン(Schoen, C.)の例)：$\mathbb{P}^2$ の斉次座標を $(t_0 : t_1 : t_2)$ として，3次斉次式 $f(t_0 : t_1 : t_2)$，$g(t_0 : t_1 : t_2)$ を2つとってくる．$f=0$ で定義される曲線を C，$g=0$ で定義される曲線を D とする．f, g を十分に一般にとると，C, D はともに特異点をもたず，互いに9点で横断的に交わっていると仮定することができる．さて，f, g から有理写像

$$\bar{\phi} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

が，

$$\bar{\phi}(p) := (f(p) : g(p)) \in \mathbb{P}^1$$

によって決まり，上で述べた9点以外では正則写像になっている．$\bar{\phi}$ を正則写像にするためには，$\mathbb{P}^2$ をこれら9点でブローアップすればよい．できあがった曲面を S とすると，S から $\mathbb{P}^1$ へ正則写像 $\phi : S \to \mathbb{P}^1$ が存在して，一般ファイバーは楕円曲線になる．このような代数曲面を有理楕円曲面とよぶ．さて，有理楕円曲面を2つとってきて，$\phi_1 : S_1 \to \mathbb{P}^1$，$\phi_2 : S_2 \to \mathbb{P}^1$ とおく．ϕ_1 は3次式 f_1, g_1 から構成されたもので，ϕ_2 は3次式 f_2, g_2 から構成されたものとする．ここで，2つの有理楕円曲面を，$\mathbb{P}^1$ 上でファイバー積をとる．

$$X := S_1 \times_{\mathbb{P}^1} S_2.$$

つまり，

$$X = \{(p, q) \in S_1 \times S_2 \,;\, \phi_1(p) = \phi_2(q)\}$$

である．f_i, g_i を十分一般にとると，X は非特異になり，単連結な 3 次元カラビ-ヤウ多様体である．X のオイラー数は，0 で，$h^{1,1}(X) := \dim H^1(X, \Omega_X^1)$ は 19 である．

2 つの例からつぎのことがわかる．まず，複素構造の変形では位相は変化しないので，異なるオイラー数を持ったカラビ-ヤウ多様体を変形でつなげることはできない．したがって，$K3$-曲面に対する小平の定理は，3 次元カラビ-ヤウ多様体に対しては成り立たない．すでに，数百種類の異なった位相型をもった 3 次元カラビ-ヤウ多様体が構成されている．現在でもつぎの問題は未解決である．

> **問題**　3 次元カラビ-ヤウ多様体の位相型は有限か？　たとえば，オイラー数，第 2 ベッチ数は有界か？

この問題に関して少しコメントしておく．楕円ファイブレーションをもつ 3 次元カラビ-ヤウ多様体に対しては，ある種の有限性が証明されている（Gross, M.）．また，どんな 3 次元カラビ-ヤウ多様体も第 2 ベッチ数が 13 以下の標準特異点をもったカラビ-ヤウ多様体に双有理同値であることもわかっている（Wilson, P. M. H.）．最後に，特殊なカラビ-ヤウ多様体に対しては，小木曽啓示による分類結果があることを付言しておく．

3　コニフォールド（conifold）とリード・ファンタジー（Reid's fantasy）

ここでは，通常の変形ではつながらないような 2 つの 3 次元カラビ-ヤウ多様体をある操作でつなげることを考える．例として，先に挙げたシェーンの例と，$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の中の (3, 3)-型超曲面をこの操作でつなげてみよう．シェーンの例を定義したところで，4 つの 3 次斉次式 $f_i\ (i=1,2)$, $g_i\ (i=1,2)$ を用意した．$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 双斉次座標を $(s_0 : s_1 : s_2) \times (t_0 : t_1 : t_2)$ として，$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の中で

$$f_1(s)g_2(t) - g_1(s)f_2(t) = 0$$

によって定義される (3, 3)-型超曲面を Y と書こう．第 1 成分の $\mathbb{P}^2$ のなか

で $f_1(s)=g_1(s)=0$ で定義される 9 点を $p_1,\cdots,p_9$ と書く．同様にして，第 2 成分の $\mathbb{P}^2$ の 9 点 $q_1,\cdots,q_9$ を $f_2(t)=g_2(t)=0$ で定義する．このとき Y は 81 個の点 $\{(p_i,q_j)\}_{1\leq i,j\leq 9}$ で特異点をもつ．これらの点の近傍で，f_1, g_2,g_1,f_2 は $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ 局所座標を与えるので，81 個の特異点はすべてノード

$$V:=\{xy-zw=0\,;\,(x,y,z,w)\in\mathbb{C}^4\}$$

の形をしている．Y の標準束は自明で，不正則数も消えている．このように，ノードを特異点としてもつようなカラビ-ヤウ多様体のことを，カラビ-ヤウ コニフォールドとよぶこともある．ここでノードの特異点解消について説明しよう．V を原点でブローアップすると例外因子として $E:=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ が現れる：

$$\pi:\tilde{V}\longrightarrow V,\qquad \pi^{-1}(0)\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1.$$

また V には，4 つのヴェイユ因子

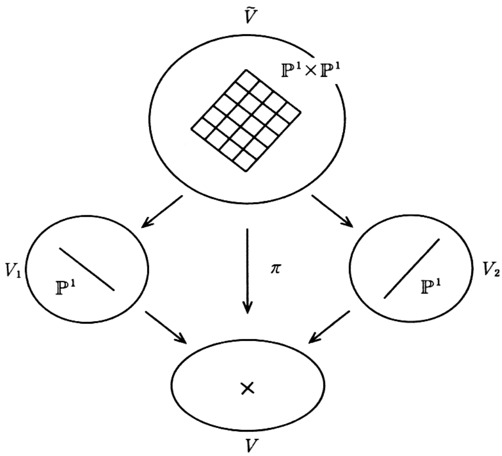
$$G_1:=\{x=z=0\},$$
$$G_2:=\{x=w=0\},$$
$$H_1:=\{y=w=0\},$$
$$H_2:=\{y=z=0\}$$

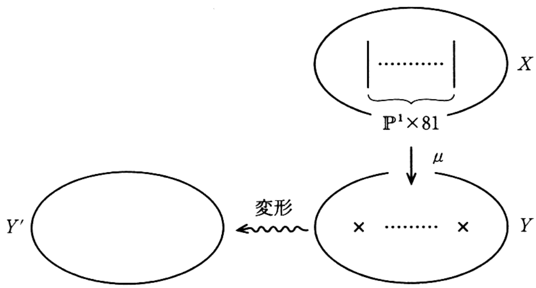
が存在して，いずれもカルティエ因子ではない．V を G_1 でブローアップしたものは，V を H_1 でブローアップしたものに一致する．これを $\pi_1:V_1\to V$ と書く．一方，V を G_2 でブローアップしたものは，V を H_2 でブローアップしたものに一致し，これを $\pi_2:V_2\to V$ と書く．このとき V_1,V_2 はともに V の特異点解消をあたえ，$\pi_i(0)\cong\mathbb{P}^1(i=1,2)$ である．これら V_1,V_2 のことを，V の小特異点解消(small resolution)とよぶ．

さて，シェーンのカラビ-ヤウ多様体を X とする．このとき，X は，コニフォールド Y を，ヴェイユ因子

$$G:=\{f_1(s)=g_1(s)=0\}$$

にそってブローアップしたものにほかならない．このブローアップは，Y 上の 81 個のノードの小特異点解消をあたえている．したがって，ブローアップ $\mu:X\to Y$ の例外集合は，81 個の $\mathbb{P}^1$ からできている．最後に，Y を $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ の(3,3)-型超曲面として少し変形すれば，非特異なカラビ-ヤウ多様体 Y' を得る．Y' のオイラー数は -162 なので，オイラー数が 0 の X と通常の変形ではつながらないことは明らかである．このようにして，X から Y' に到達する操作のことを**コニフォールド・トランジション**とよぶ．





コニフォールドのかわりに標準特異点をもったカラビ-ヤウ多様体を使って同様の操作を考えることができる(ここでは，特異カラビ-ヤウ・トランジションとでもいっておく)．ただしこのとき，特異カラビ-ヤウ多様体がいつ変形で非特異にできるかという問題に直面する．これに関してはいくつかの結果が筆者やグロスによって得られているがここでは省略する．

リード・ファンタジー(Reid's fantasy)とは次の予想(というよりは夢)をいう．

予想　2つの3次元単連結カラビ-ヤウ多様体は，変形と特異カラビ-ヤウ・トランジションの2つの操作を繰り返すことでつながる．

4　その他の未解決問題

最後に未解決問題を2つ紹介して今回の話を終えたい．

問題　単連結なカラビ-ヤウ多様体は有理曲線を含むか？

この問題は，カラビ-ヤウ多様体のグロモフ-ウィッテン不変量と深い関係がある．ここでいう有理曲線とは，正規化(特異点解消)すると $\mathbb{P}^1$ になる代数曲線のことである．代数的 $K3$-曲面に対してはこの問いは肯定的である．したがって問題は3次元以上の場合である．ファノ多様体の場合，森理論が有効であったが，標準束が自明な場合にはどのようにして有理曲線を見つけ出せばよいのか分からない．また単連結という仮定をいれたのは，エタール被覆をとるとアーベル多様体になるようなカラビ-ヤウ多様体を排除するためである．

問題　3次元カラビ-ヤウ多様体 X に対して，X と双有理同値なカラビ-ヤウ多様体の同型類の個数は有限か？

この問題は，極小モデル問題と深い関係がある．3次元では1つの双有理類のなかに複数個極小モデルが存在する．異なる極小モデルは，フロップと呼ばれる変換で結ばれている．したがって問題になっているカラビ-ヤウ多様体たちは，X に対してフロップを何回か施してできた多様体である．またモリソン(Morrison, D.)はカラビ-ヤウ多様体のケーラー錐に関する予想(コーン予想)を提出している．これらの予想は，ミラー予想とも関係があるようである．

参考文献

代数多様体の分類理論に関する啓蒙的な文献としては次があげられる.

[1]　『数学セミナー』1997年12月号特集「小平邦彦」

もっと本格的に勉強したい人には，次の文献がある.

[2]　Ueno, K.: *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Math. **439**, Springer-Verlag.

[3]　Wilson, P. M. H.: *Towards birational classification of algebraic varieties*, Bull. London Math. Soc. **19** (1987), 1-48.

[2], [3]を読めばカラビ-ヤウ多様体が代数多様体のなかでどのような位置付けにあるのかがよくわかるとおもう．カラビ-ヤウ多様体の変形理論や，トーリック幾何を用いたミラー多様体の構成などは，次の文献のなかでコンパクトに紹介されている.

[4]　Voisin, C.: *Symétris miroir*, Panoramas et Synthèses **2**, Soc. Math. de France, Paris, 1996.

[4]にはアメリカ数学会からでた英訳版もあるようである.

［なみかわ　よしのり］

5 特異点と位相的場の理論

高橋篤史
[大阪大学大学院理学研究科]

1 はじめに

超弦理論は，1次元の自由度を持った弦の振動・運動により素粒子・空間が記述されると考える，「万物の理論」の有力な候補として活発に研究されている物理理論です．それは数学のさまざまな分野とも密接に関係し，数学と物理の双方に大きな影響を与えています．その中でも，「異なる2種類の幾何学が常に対となって存在する」ということを主張する**ミラー対称性**は，最も数学と超弦理論の関連性が強いところです．

タイトルにあるもう一つのキーワード，**特異点**という言葉で，皆さんはどのような幾何学的対象を思い浮かべるでしょうか？ 特異点という項目で辞書を引くと[1]「曲線や曲面上で，その点での接線や接平面が存在しなかったり，二つ以上あったりする点」と書いてあります．たしかにそのとおりなのですが，ここではより「特異」という意味に近い，「周りの構造と比較したときに，際立って性質が異なっている，とくに優れた性質をもつ点」のことと考えてください．ある種のよいクラスの特異点に限ってみれば，その特別な点がどんなに多くの対称性や大局的構造の情報を凝縮して持っているか，ということに容易に気づくことができるからです．ミラー対称性で登場するのはそのようなよい特異点であって，例えば，滑らかな非可換多様体を可換幾何学（複素代数多様体）で見ているがために，その性質が特異性として現れていると解釈できるものです．

この本では，ミラー対称性と特異点の関係について本章と11章で解説します．特異点としては，1つの多項式の零点集合で表されるような図形に現れる特別な点，超曲面特異点，を考えます．本章では古典的ミラー対称性，つまり位相的弦理論のミラー対称性に関連した話題を，11章ではホモロジー的ミラー対称性に関連した話題を解説します．

2 超弦理論と特異点との遭遇

まずは特異点理論と超弦理論の関係の歴史について簡単に振り返ってみたいと思います．超弦理論についてのより詳しい解説は1章をご覧ください．

超弦理論が矛盾なく定義できるのは時空が10次元のときであるということが知られています．その一方で，私たちの住んでいる時空は4次元です．ですので，この10次元時空は4次元と6次元の空間に分かれていて，6次元空間は非常に小さくて見えないために普段は残りの4次元時空だけ認識している，と仮定して理論を構築する「超弦理論のコンパクト化」と呼ばれる考え方があります．4次元時空上で電子・光子・クオークといった素粒子たちを支配する統一理論をもたらす $N=1$ 超対称場の理論を得るには，この考え方に基づくと，残りの6次元空間を標的空間とする弦上(world sheet)で $N=2$ の超対称性を持つ共形場理論を考える必要があります．そしてこの $N=2$ 共形場理論が矛盾なく定義できるために，6次元空間がカラビ-ヤウ多様体であることが要請されます．

このようにして $N=2$ 共形場理論の研究が重要となります．しかしながら，上のように超弦理論からカラビ-ヤウ多様体を経由して構成するシグマ模型と呼ばれる $N=2$ 共形場理論は非常に難しくて，具体的にいろいろな量を計算するのにはあまり向いていません．そのため別の方法で理論を構成・研究する必要があり，超曲面特異点を出発点にした，$N=2$ ランダウ-ギンツブルグ理論と呼ばれる $N=2$ 共形場理論が導入されました．この理論はスーパーポテンシャルと呼ばれる1つの多項式[2]のもつ情報だけから出発して，理論の真空・状態・相互作用などすべての物理量を得ようと試みる理論です．

$N=2$ ランダウ-ギンツブルグ理論は80年代後半から熱心に研究されたのですが，数学側では，同じ研究対象がまったく異なる動機からすでに80年ごろには現れていました．齋藤恭司氏による**原始形式**による周期写像

1) 数学の定義を用いることなく平易な日常用語で書けるか興味があって辞書で調べてみました．

2) 一般的には正則関数．

の理論です．齋藤氏の目標は楕円積分論の一般化・高次元化でした．彼は楕円曲線の族を拡張して超曲面特異点とその半普遍変形を考察し，第一種微分の自然な拡張として原始形式をいくつかの公理で定義しました．そして，重みつき斉次超曲面特異点の場合に原始形式が存在し[3]，半普遍変形の底空間(変形を司るパラメーターたちの空間)に**平坦構造**が入ることを示しました．

ここで述べた齋藤氏の結果を $N=2$ ランダウ-ギンツブルグ理論の言葉で言い換えると，与えられたスーパーポテンシャルに摂動を加えて，その摂動によって物理系がどのように振る舞うかを考察し，理論に真空が存在することを証明し[4]，摂動の空間上に定まる種数 0 の相関関数を計算した，ということになります．

次の節からは数式を使ってもう少し具体的に見てみましょう．まずは，多項式から出発して最終的に得たいもの，平坦構造・相関関数，がどのようなものか見ていただくために，2 章と同様に，複素射影空間の量子コホモロジーを例にとって説明します．

3　量子コホモロジー環の復習

まず $\mathbb{CP}^n$ を n 次元複素射影空間とします．これは $n+1$ 個の複素数の比 $(x_0:\cdots:x_n)$ のなす空間です[5]．なので，$\mathbb{CP}^{n-1}$ は $(x_0:\cdots:x_{n-1}:0)$ として $\mathbb{CP}^n$ の $n-1$ 次元部分空間となり，以下同様にして $\mathbb{CP}^n\supset\mathbb{CP}^{n-1}\supset\cdots\supset\mathbb{CP}^1\supset\mathbb{CP}^0=(1:0)$ という部分空間の列ができます．大雑把に言うと，$\mathbb{CP}^n$ の部分空間たちに対して，連続変形で移りあうものは同じと考えて作ったアーベル群がホモロジー群 $H_*(\mathbb{CP}^n)$ で，そのポアンカレ双対がコホモロジー群 $H^*(\mathbb{CP}^n)$ でした．今の場合，上で作った部分空間を用いて，$H^*(\mathbb{CP}^n)\bigoplus_{i=0}^{n}H^{2i}(\mathbb{CP}^n)$ とするとき

$$H^{2i}(\mathbb{CP}^n)\cong\mathbb{C}[\mathbb{CP}^{n-i}] \qquad (1)$$

となっています[6]．

$H^*(\mathbb{CP}^n)$ を $n+1$ 次元のアフィン空間と思って平坦な座標 $(t_0,t_1,\cdots,t_n)$ を入れます．とくに部分空間 $H^{2i}(\mathbb{CP}^n)$ に対してそれぞれ t_i を対応させることにします．さらに，$H^*(\mathbb{CP}^n)$ を原点での接空間と同一視し，同型

$H^*(\mathbb{CP}^n) \cong T_0H^*(\mathbb{CP}^n) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{C}\partial/\partial t_i$ を考えます．とても天下りですが，グロモフ-ウィッテン不変量の母函数（グロモフ-ウィッテン・ポテンシャル）は次のように与えられます：

$$F_0^{\mathbb{CP}^n}(t) := \frac{1}{6}\sum_{a+b+c=n} t_a t_b t_c + \sum_{d>0}\sum_{k_2,\cdots,k_n \geqq 0} N_{d:k_2,\cdots,k_n} \frac{t_2^{k_2}\cdots t_n^{k_n}}{k_2!\cdots k_n!} e^{dt_1}. \qquad (2)$$

ここで $N_{d:k_2,\cdots,k_n}$ は d 次のグロモフ-ウィッテン不変量，すなわち $\mathbb{CP}^n$ の一般的な位置に与えられた k_i 個の $n-i$ 次元部分空間 $\mathbb{CP}^{n-i}$ と交わる d 次有理曲線の本数で，$\sum_{i\geqq 2}(1-i)k_i+(n+1)d = 3-n$ 以外のときは0と定義します．ここで t_0 はポテンシャル函数の3次の項にのみ登場していることに注意してください．

$F_0^{\mathbb{CP}^n}$ の三階微分 $C_{ijk} := \partial F_0^{\mathbb{CP}^n}/\partial t_i \partial t_j \partial t_k$ を考えると，グロモフ-ウィッテン不変量の性質により二つの重要な性質が導かれます．一つ目は $H^*(\mathbb{CP}^n)$ 上の非退化双線型形式 $\eta : H^*(\mathbb{CP}^n) \otimes H^*(\mathbb{CP}^n) \to \mathbb{C}$ で，$\eta(\partial/\partial t_i, \partial/\partial t_j) := C_{0ij} = \delta_{in-i}$ として定めます[7]．今の場合 η は，（コ）ホモロジーの交点数にちょうど一致しています，もう一つは WDVV 方程式

$$\sum_{a,b=0}^{n} C_{ija}(\eta_{ab})^{-1}C_{bkl} = \sum_{a,b=0}^{n} C_{ika}(\eta_{ab})^{-1}C_{bjl} \qquad (3)$$

です．とくに $n=2$ の場合，この WDVV 方程式は式

$$C_{222}^2 = C_{112}^2 - C_{111}C_{122} \qquad (4)$$

と同値となり，$N_{d:k_2}$ は $k_2 = 3d-1$ のとき以外0なので $N_d := N_{d:3d-1}$ とおくと，2章における式(25)

$$N_d = \sum_{a+b=d} N_a N_b (a^2 b^2{}_{3d-4}C_{3a-2} - a^3 b_{3d-4}C_{3a-1}) \qquad (5)$$

が簡単に得られます．$\mathbb{CP}^2$ の2点を通る直線がちょうど一本であることより，つまり $N_1 = 1$ より，すべての N_d が帰納的に計算できたのでした．

$H^*(\mathbb{CP}^n)$ 上に t でパラメーター付けられた積[8]を

3）　一般的な場合は齋藤盛彦氏によって証明されました．

4）　物理では真空の存在は常に仮定されていますが，本当は証明しなければならない主張です．

5）　$\mathbb{C}^n$ を $n+1$ 枚用意して貼り合わせることでも作れます．

6）　簡単のため，係数は $\mathbb{Z}$ ではなく $\mathbb{C}$ に，ポアンカレ双対によりコホモロジーの元をホモロジーの元と同一視して書いています．

7）　ここで δ_{ab} はクロネッカーのデルタ記号とします．

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\circ\frac{\partial}{\partial t_j} := \sum_{a,b=0}^{n} C_{ija}(\eta_{ab})^{-1}\frac{\partial}{\partial t_b} \tag{6}$$

とすることで定義できます．WDVV 方程式はこの積$\circ$が結合的であることと同値です．とくに$\partial/\partial t_0$はこの代数の単位元を与えます．あと，重要な関係式として

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\circ\frac{\partial}{\partial t_j},\frac{\partial}{\partial t_k}\right) = \eta\left(\frac{\partial}{\partial t_i},\frac{\partial}{\partial t_j}\circ\frac{\partial}{\partial t_k}\right) \tag{7}$$

が成り立ちます．

また，$t_i=0,\ i\neq 1$ とおくと，代数 $(H^*(\mathbb{CP}^n),\circ)$ は $\mathbb{C}[x,q]/(x^{n+1}-q)$, $q:=e^{t_1}$ と同型になることがわかります．このように，ポテンシャル函数 $F_0^{\mathbb{CP}^n}$ から量子コホモロジー環を導くことができました．

$$f_q := z_1+\cdots+z_n+q\cdot(z_1\cdots z_n)^{-1}$$

とおいたとき，

$$QH^*(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{C}[x,q]/(x^{n+1}-q) \tag{8}$$

$$\cong \mathbb{C}[z_1^{\pm},\cdots,z_n^{\pm},q]\Big/\left(z_1\frac{\partial f_q}{\partial z_1},\cdots,z_n\frac{\partial f_q}{\partial z_n}\right) \tag{9}$$

と書けることに注意しておきます．この事実は特異点理論との関連性で重要となります．

次にオイラー・ベクトル場と呼ばれるベクトル場Eを

$$E := \sum_{i=0}^{n}(1-i)t^i\frac{\partial}{\partial t_i}+(n+1)\frac{\partial}{\partial t_1} \tag{10}$$

で与えます．Eを考えることと，座標 $(t_0,t_1,\cdots,t_n)$ にそれぞれ

$$\begin{aligned}&\deg t_i = 1-i, \qquad i\neq 1\\ &\deg e^{t_1} = n+1\end{aligned} \tag{11}$$

と次数付けを与えることがちょうど対応しています．すると，この次数付けに関してポテンシャル函数 $F_0^{\mathbb{CP}^n}$ は次数 $3-n$ を持つ，つまり

$$EF_0^{\mathbb{CP}^n} = (3-n)F_0^{\mathbb{CP}^n} \tag{12}$$

となることがわかります．本当はt_1にも他の変数と同様の方法で次数0を与えたいところなのですが，そのままではポテンシャル函数が次数

8） 正確には，$\mathbb{C}[[t_0,t_1,\cdots,t_n]]$ を $t_0,t_1,\cdots,t_n$ の形式的べき級数環とするとき，$H^*(\mathbb{CP}^n)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[t_0,t_1,\cdots,t_n]]$ 上の $\mathbb{C}$-双線型な積を考えます．

$3-n$ を持つことができない，つまり固有値 $3-n$ を持つ E の固有函数にならないので，奇妙な項 $(n+1)\partial/\partial t_1$ を E に付け加えて調整しました．このことには幾何学的な意味がありますので少し説明することにしましょう．

多様体[9]（今の場合 $\mathbb{CP}^n$）がどの程度アファイン空間から離れているかを計る指標としてチャーン類というものがあります．とくに，第1チャーン類 $c_1(\mathbb{CP}^n)$ は，多様体をスケール変換したときの振る舞いをあらわす量，どの程度スケール変換不変でないかをあらわす量です．実は $(n+1)\partial/\partial t_1$ は，同型 $H^*(\mathbb{CP}^n)\cong\bigoplus_{i=0}^{n}\mathbb{C}\partial/\partial t_i$ による $c_1(\mathbb{CP}^n)$ の像になっています．$\sum_{i=0}^{n}(1-i)t^i\partial/\partial t_i$ は，その形からスケール変換に関係したベクトル場であることがわかると思います．このベクトル場を第1チャーン類 $c_1(\mathbb{CP}^n)$ を補正したオイラー・ベクトル場 E を考えると，ちょうどいろんな項が互いに打ち消し合い，多様体それ自身はスケール変換でうまく振る舞わないにもかかわらず，ポテンシャル函数はスケール変換に関して共変な量となるのです．

4 平坦構造・フロベニウス構造

ここで得たデータを整理しましょう．まずアファイン空間 $H^*(\mathbb{CP}^n)$ とその接空間 $T_0H^*(\mathbb{CP}^n)\cong H^*(\mathbb{CP}^n)$ を考え，ポテンシャル函数 $F_0^{\mathbb{CP}^n}$ を定めました．$F_0^{\mathbb{CP}^n}$ はオイラー・ベクトル場 E に関して斉次（次数 $3-n$）であり，とくにその3階微分によって $H^*(\mathbb{CP}^n)$ 上にパラメーターに依存する結合的な積構造が定まりました．さらに，特別な座標 t_0 があって，それに関する $F_0^{\mathbb{CP}^n}$ の微分を用いて，$T_0H^*(\mathbb{CP}^n)$ の非退化双線型形式（交点数）η が与えられ，積構造 $\circ$ の単位元を記述しました．

基本データの4つ組 $(T_0H^*(\mathbb{CP}^n), F_0^{\mathbb{CP}^n}, E, \partial/\partial t_0)$ とこれまでに述べたようなこの4つ組がみたす性質は，フロベニウス構造または平坦構造として公理化されていて，ミラー対称性の研究において最も重要な研究対象の一つです[10]．これが，多様体や特異点といった幾何学から出発して最終的に得たい代数構造です．とくに，「ある多様体上のシンプレクティック幾何

9）複数のアファイン空間を貼り合わせて作られる図形のことです．

10）発見の歴史的順序とは逆に，単にフロベニウス構造と呼ばれることが非常に多い．

学から定まるフロベニウス構造と別の多様体上の複素幾何学から定まるそれとが同型となること」が**古典的ミラー対称性**です．

少し弦理論の雰囲気を感じられる事実を紹介します．$\bar{M}_{0,n}$ を $\mathbb{CP}^1$ とその上の n 点の組に対するドリーニュ-マンフォードのモジュライ空間とします．このとき，フロベニウス構造 (V, F_0, E, e) を与えることと，非退化双線型形式を持つベクトル空間 (V, η) と(次数付き)多重線型写像

$$I_n : V^{\otimes n} \longrightarrow H^*(\bar{M}_{0,n}), \qquad n \geqq 3,$$

で埋め込み $\bar{M}_{0,n_1+1} \times \bar{M}_{0,n_2+1} \hookrightarrow \bar{M}_{0,n_1+n_2}$ と整合性の取れたものの組 (V, η, I_n) を考えることが同値であることが知られています．

フロベニウス構造は，1990 年ごろにドゥブロヴィン氏が可積分系の研究のため，2 次元の $N = 2$ 超対称場の理論や位相的場の理論を公理化する際に，ポテンシャルおよび式(7)[11] に基づき導入した概念です．はじめに述べたように，同じ構造が齋藤恭司氏による原始形式(primitive form)による周期写像の研究において 1980 年ごろに現れていて，そこでは平坦構造と呼ばれていました．こちらの立場では，特異点の半普遍変形の底空間に正則平坦な座標[12] が入る，ということに注目して公理化された概念だからです．二つの異なる動機から出発して同じ構造に至ったということは非常に興味深いことです．

5　特異点・原始形式・平坦構造

最終的に導きたいものがはっきりしたところで，特異点の例に移りましょう．一番簡単な例として $f(x) = x^{n+1}$ という 1 変数多項式を考えます．$f(x) = 0$ が定める図形は $n+1$ 点が原点に集まった重複度 $n+1$ の点[13] です．これは通常の意味での滑らかな多様体(0 次元なので単に 1 点)ではなく，特異点です．もう少し正確に述べると，一般に多項式 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ で定まる図形の特異点というのは，$f = \partial f/\partial x_1 = \cdots = \partial f/\partial x_n = 0$ を重複度を込めて考えた図形のことです．今の場合 $df/dx = (n+1)x^n$ なので，「特異点上の函数のなす環」は $Jac(f) := \mathbb{C}[x]/(x^n)$ となります．この環は $\mathbb{C}$ ベクトル空間として有限次元であり，$f(x)$ が x に関して斉次だったので自然に各基底 x^i, $i = 0, \cdots, n-1$ に次数 $i/(n+1)$ が与えられていることに注意してください[14]．$Jac(f)$ の元 x^i, x^j に対して，留数(residue)

$$(x^i, x^j) \longmapsto \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint x^i \cdot x^j \frac{dx}{x^n} \tag{13}$$

を与えることで，$Jac(f)$ 上に非退化な双線型形式が定まります．しかも $\circ$ を $Jac(f)$ 上の自然な積構造とするとき，式(7)も成り立ちます．つまり $f(x)$ から出発してフロベニウス代数が得られました．

一般の場合には，特異点 $f(x_1, \cdots, x_n)$ としては

$$Jac(f) := \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{14}$$

が有限次元となるものを，そして $Jac(f)$ 上の非退化双線型形式として留数を一般化したグロタンディーク留数(Grothendieck's residue symbol)

$$(h(x), g(x)) \longmapsto \mathrm{Res}_{\mathbb{C}^n}\left[\begin{matrix} h(x)g(x)dx_1\cdots dx_n \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{matrix}\right] \tag{15}$$

を考えることになります．

次に特異点を変形しましょう．ここで言う変形とは，ある条件を保ったまま[15]，連続的に図形を変化させ，最終的には特異点がなくなるまで動かすということです．一般の $n+1$ 次の多項式には多重度もこめて $n+1$ 個の根があります．今考えている例 $f(x) = x^{n+1}$ は $n+1$ 次の多項式で，すべての根が 0 に縮退したものとみなすことができます．x を適当に平行移動することですべての根の和を 0 にすることができるので，$f(x)$ を変形しようとしたとき，それは

$$f_\alpha(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-\alpha_i), \qquad \sum_{i=0}^{n}\alpha_i = 0 \tag{16}$$

と書けることになります．$f_\alpha = 0$ の特異点は $f_\alpha = df_\alpha/dx = 0$ を満たす点だったから，ある i と j に対して $\alpha_i - \alpha_j = 0$ となるときにのみ特異点が存

11）この式を満たすような非退化双線型形式を持つ結合的代数はフロベニウス代数と呼ばれていて，フロベニウス構造という名前の由来となっています．

12）底空間は複素多様体で，その正則ベクトル場の空間に入る正則なレビ・チビタ（Levi = Civita)接続に関して平坦な座標．

13）これから述べることを正確にするためには，環付き空間という概念を導入する必要があります．

14）多項式の次数は 1 に正規化するのがこの分野での慣習です．

15）今の場合には変数の数を 1 変数に保ったまま動かします．

在することがわかりますね．言い換えると，すべての根 α_i たちが互いに異なるとき，$f_\alpha=0$ は特異点を持ちません．ここで，$\alpha_i-\alpha_j$ があらわす $f_\alpha=0$ の部分図形は 0 次元球面で，それが 1 点に潰れることで特異点がでます．つまり，0 次元球面があったという情報が変化して，特異性となって現れることになったとみなせるのです．より一般の n 変数の多項式から出発して考えると，同様に $n-1$ 次元球面が潰れて特異性が出現することがわかります．

a_k を α_i たちの k 次の基本対称式とするとき，

$$f_a(x)=x^{n+1}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{17}$$

と書くことができます．何か気づきませんか？ ちょうど $Jac(f)$ の線型空間としての基底 x^k たちの線型結合を $f(x)$ に付け加えたことで，うまく変形できていますね．これは単なる偶然ではありません．超曲面特異点に対して，$Jac(f)$ の基底にパラメーターをかけて線型結合をとったものを元の式 f に付け加えることで，特異点の半普遍変形と呼ばれる特異点の「よい」変形が得られることが知られています．

特異点の半普遍変形 $f_a(x)$ が与えられると，式(14)(15)の f を $f_a(x)$ に置き換えることで，パラメーター a_k に依存するフロベニウス代数の族 $Jac(f_a)$ ができます．とくに対応 $\partial/\partial a_k\mapsto\partial f_a/\partial a_k$ によって，同型

$$\bigoplus_{k=0}^{n-1}\mathbb{C}[[a_0,\cdots,a_k]]\frac{\partial}{\partial a_k}\cong Jac(f_a) \tag{18}$$

があります．この同型により，フロベニウス代数の単位元に対応する特別なベクトル場 $\partial/\partial a_0$ があることにも注意してください．そして $f_a(x)$ の次数を 1 にするように a_k に次数を入れることで，オイラー・ベクトル場が定まります．

問題なのは，$Jac(f_a)$ 上に留数(13)（または(15)）で与えられた非退化双線型形式がパラメーターに依存しない定数になるような $\bigoplus_{k=0}^{n-1}\mathbb{C}[[a_0,\cdots,a_k]]$ $\partial/\partial a_k$ の $\mathbb{C}[[a_0,\cdots,a_k]]$ 基底 $(\partial/\partial t_0,\cdots,\partial/\partial t_{n-1})$ が存在するか，言い換えるとパラメーター a_k たちの空間に平坦な座標系 $(t_0,\cdots,t_{n-1})$ が取れるか，ということです．そして，あるポテンシャル函数 $F_0(t_0,\cdots,t_{n-1})$ が存在して $Jac(f_a)$ の積構造が $F_0(t)$ の平坦座標による 3 階微分で書ける，ということが示されれば，フロベニウス構造・平坦構造が構成できることになります．これが一番難しいところで，原始形式の存在を経由して証明することにな

ります．原始形式の定義やその性質は簡単に述べることができないので，残念ながらすべて省略します．

簡単な場合に具体的に平坦座標とポテンシャル函数を書き下してみましょう．$n=1,2$ のときは a_k たちがそのまま平坦座標です．ポテンシャル函数の計算は容易なので，読者の演習問題にしたいと思います．$n=3$ ならば，

$$t_0 := a_0 + \frac{a_2^2}{8}, \qquad t_1 := a_1, \qquad t_2 := a_2$$

となり，一般には a_k たちは平坦ではないことがわかります．この場合にポテンシャル函数を計算すると，

$$F_0(t_0, t_1, t_2) = \frac{1}{2}t_0^2 t_1 + \frac{1}{2}t_0 t_1^2 - \frac{1}{16}t_1^2 t_2^2 + \frac{1}{960}t_2^5 \tag{19}$$

のようになり，オイラー・ベクトル場

$$E = t_0\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{3}{4}\cdot t_1\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2}\cdot t_2\frac{\partial}{\partial t_2}$$

に関して，$EF_0 = (5/2)F_0$ となります．

6　おわりに

$(a_0, \cdots, a_{n-1})$ で与えられる $\mathbb{C}^n$ が $f(x) = x^{n+1}$ で与えられる特異点の半普遍変形のパラメーター空間となりました．そして，その上には平坦構造がありました．$n+1$ 次式の根 α_i たちのなす空間とこの $\mathbb{C}^n$ の関係をもう少し詳しく見ておきましょう．

実は，ベクトル空間

$$\left\{(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0\right\} \tag{20}$$

は，A_n 型のルート系に対応する単純リー環のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}_{A_n}$ と同型となります．そして $n+1$ 個の根を入れ替える対称性（$n+1$ 次対称群）は，A_n 型ルート系に付随するワイル群 W_{A_n} です．そして基本対称式を取るという操作で，同型

$$\mathfrak{h}_{A_n}/W_{A_n} \cong \mathbb{C}^n \tag{21}$$

が与えられています．すなわち，$f(x) = x^{n+1}$ の半普遍変形の空間はルー

ト系の言葉を用いて$\mathfrak{h}_{A_n}/W_{A_n}$と書けるのです．そして前の節で説明したような，非常によいクラスの特異点に対する平坦構造は，ルート系やワイル群の不変式に基づいて求めることもできます．

およそ100年以上前，F. クライン氏は正多面体に対して有限群を対応させ，2次元単純特異点との関連性を示しました．E. ブリースコーン氏はそれらの特異点の変形・解消をリー環・ルート系を用いて明確に述べました．そして齋藤恭司氏はこれらの関連性をさらに拡張し，また特異点の半普遍変形の空間に，複素解析的手法とルート系に基づく代数的手法で平坦構造を導入しました．11章では，これら有限群・ルート系・特異点という一見異なる分野の数学をミラー対称性が密接に関係付ける様子を紹介します．

参考文献

[1] 江口徹，「ミラー対称性入門：ミラー対称性とは」，『数学セミナー』2006年10月号．

[2] 深谷賢治，「ミラー対称性入門：グロモフ-ウィッテン不変量入門」，『数学セミナー』2006年11月号．

[3] 齋藤恭司，「原始保型形式」，『数学の最先端 21世紀への挑戦』(第1巻)，シュプリンガー・フェアラーク東京，2002，pp. 126–159.

[4] B. Dubrovin, "*Geometry of 2D Topological Field Theories*", Lecture Notes in Mathematics 1620, Springer, 1996, pp. 120–348.

[5] C. Hertling, "*Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities*", Cambridge University Press, 2002.

[6] Y. I. Manin, "*Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*", American Mathematical Society, 1999.

[たかはし あつし]

6 ミラー対称性と共形場の理論

細野 忍
[東京大学大学院数理科学研究科]

1 はじめに

これまでの章で，弦理論の研究からカラビ-ヤウ多様体のミラー対称性が発見され，物理学者・数学者を交えた研究を通して，代数幾何学やシンプレクティック幾何学にまたがるいくつもの成果が得られている様子が解説されている．

ここでは，物理学者が弦理論を記述する手段として用いる共形場の理論という視点からミラー対称性の一側面に少し立ち入って解説を試みたいと思う．

ミラー対称性の鍵となる共形場の理論は，$N=2$ 共形場の理論と呼ばれるもので，これについては1章で明快な解説がなされているので，ここでは経路積分による等価な表示から始めることにしよう．

2 弦理論とは

数学をするときにはまず定義をはっきりさせないと議論が進まないと誰しも思うであろう．そこで，弦理論の定義は？ などと最初から言われそうであるが，ここでは次のようなものを一応の定義として議論を始めよう．

X をコンパクトな C^∞ 多様体とし Σ_g を種数(genus) g のリーマン面とする．X には計量 G_{AB} を定め，Σ_g には計量 h_{ab} を定めることにする．このとき，C^∞ 写像 $\phi: \Sigma_g \to X$ と計量 h_{ab} に関し，適当な重みを付けて“すべて足し上げる”もの，

$$F_g^X(G) := \int \mathcal{D}h_{ab} \int \mathcal{D}\phi e^{-S(h,\phi\,;\,G)} \tag{1}$$

を X 上の弦理論と呼ぶ．ここで，$\int \mathcal{D}h_{ab} \int \mathcal{D}\phi$ は，すべての計量 h_{ab} とすべ

ての C^∞ 写像のなす無限次元空間の上での積分を表し，物理学ではファイマンの**経路積分**と呼ばれている．

経路積分という，数学者には，何やら怪しげなものが始めから登場するが，20 世紀の理論物理学，とくに場の量子論はこれをなくして語ることは不可能である．幸いなことに(1)の場合には，もう少しもっともらしい積分の形を導くことができる．そこで，重みを表す関数 $S(G)=S(h,\phi\,;G)$ を

$$S(G)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_g}d^2x\sqrt{h}\,G_{AB}h^{ab}\frac{\partial\phi^A}{\partial\theta^a}\frac{\partial\phi^B}{\partial\theta^b} \tag{2}$$

という形に定めてみよう．ここで，Σ_g に局所座標 $(\theta^a)=(\theta^1,\theta^2)$ を入れて，同様に X にも局所座標を入れてその座標を用いて C^∞ 写像 $\phi:\Sigma_g\to X$ を表した．また，$(h^{ab})=(h_{ab})^{-1}$，$h=\det h_{ab}$ を表し，繰り返した添字は断りのない限り和を意味するというアインシュタインの縮約則を用いた．重み関数 $S(h,\phi\,;G)$ は，自然に Σ_g の座標変換 $\theta^a\to\theta^a+\zeta^a(\theta)$ の下で不変になっている上に，計量 h_{ab} の共形変換

$$h_{ab}(\theta)\longrightarrow e^{\rho(\theta)}h_{ab}(\theta)$$

の下でも不変になっていて標題の共形場の理論を定める．共形場の理論の特徴はすべての計量 h_{ab} に関する和が

$$\mathrm{M}_g=\{\Sigma_g\ \text{上の計量}\ h_{ab}(\theta)\}/\sim$$

に縮小するところにある．ここで，$\sim$ は座標の取り換えや共形変換でつながる計量は同じと見なして 1 回しか数えないという意味である．M_g はリーマン面の複素構造の変形空間（リーマン面のモジュライ空間）として詳しく調べられていて，特にコンパクトな複素多様体になることが知られている ($\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{M}_g=3g-3,\ g>1$)．こうして，2 つの経路積分のうち 1 つは有限次元の積分で置き換えられて

$$F_g^X(G)=\int_{\mathrm{M}_g}d^{6g-6}m\int\mathcal{D}\phi e^{-S(h,\phi\,;G)} \tag{3}$$

となる．

まだ経路積分が残されていて数学的な定義になっていないが，物理学者には十分な定義となっている．これをもとにした計算の処方が存在するからである．ただし，次の議論が大切で欠かせないがここでは省略する：

1)　経路積分 $\int \mathscr{D}h_{ab}$ が実際にモジュライ空間 M_g 上の積分に縮小するのは多様体 X のリッチ曲率 $R(G)_{AB}$ が 0 に等しい場合である．正確には多様体は 10 次元でないといけないが，ここでは 10 次元の多様体を $\mathbb{R}^{d-1,1}\times X$ のように d 次元の時空と X の直積で与えていると理解する．

2)　式(1),(3)では省略されているが，(超)弦理論ではボーズ粒子とフェルミ粒子の対称性を持つ設定を考える．その結果 X はケーラー多様体であることが要請される．

1),2)の要請のもとに，コンパクトなケーラー多様体で，リッチ曲率 $R(G)_{i\bar{j}}=\partial_i\partial_{\bar{j}}\det(G_{m\bar{n}})$ が零に等しい計量 $G_{i\bar{j}}$(カラビ-ヤウ計量)をもつ多様体──**カラビ-ヤウ多様体**に至るのである．

3　ミラー対称性

弦理論では，複素 n 次元カラビ-ヤウ多様体 X を固定して，そのカラビ-ヤウ計量 G_{AB} の関数 $F_g^X(G)$ を考える．ここでは，カラビ-ヤウ計量 G_{AB} の変形を考えて関数 $F_g^X(G)$ の性質を調べることにしよう．

3.1　変形のパラメータとミラー対称性

X を複素多様体とすると $J^2=-1$ となるテンソル J_A^B(複素構造)が存在する．計量 G_{AB} をエルミート型にとると $G_{AB}=G_{CD}J_A^CJ_B^D$ が成り立ち，$\kappa_{AB}=G_{AC}J_B^C$ は反対称 $\kappa_{AB}=-\kappa_{BA}$ となり 2 次の微分形式 κ が決まる．κ が閉形式となるような計量を，ケーラー計量と呼び，それを持つような複素多様体はケーラー多様体と呼ばれる．κ は 2 次のコホモロジー類 $[\kappa]\in H^2(X,\mathbb{R})$ を定めるが，このようにケーラー計量の類 $[\kappa]$ と表示されるコホモロジー類をケーラー類と呼ぶ．ケーラー計量であって，さらにリッチテンソル $R(G)_{AB}$ が 0 に等しい計量を持つケーラー多様体が前節で登場したカラビ-ヤウ多様体である．

接束の第 1 チャーン類 $c_1(X)$ は，リッチテンソルで表されるので，カラビ-ヤウ多様体は $c_1(X)=0$ を満たす．逆に，有名なヤウの定理によると「$c_1(X)=0$ をみたすコンパクトなケーラー多様体 X について，ケーラー類 μ に対して，$R(G)_{AB}=0$ を満たすケーラー計量がただ一つ存在する」．

この定理によって，$c_1(X)=0$ を満たすコンパクトなケーラー多様体をカラビ–ヤウ多様体の定義とすることが多い．また，$c_1(X)=0$ という条件は標準束 K_X が自明と言い換えても良い．

さて，カラビ–ヤウ計量は $G_{AB}=-\kappa_{AC}J_B^C$ と書かれるがその微小変形を考えてみよう．まず複素構造 J の変形には，小平–スペンサーの複素多様体の変形理論があてはまる．それによると，無限小変形は正則接束 $T'X$ を係数とする 1 次のコホモロジー $H^1(X,T'X)$ で与えられる．カラビ–ヤウ多様体の場合，うまいことにこの無限小変形はすべて微小な有限近傍まで延びることが示されている．その結果，微小変形のパラメータとして

$$J_A^B(m)=J_A^B(m_1,\cdots,m_s)$$

のように $s=\dim_{\mathbb{C}}H^1(X,T'X)$ 個の(複素)座標が入る．一方で，ケーラー形式 κ_{AB} は，ヤウの定理によって $H^2(X,\mathbb{R})$ の元としてケーラー類 $[\kappa]$ を定めると一意的に決まることが保証されている．そこで $H^2(X,\mathbb{R})$ の線型な実座標を $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ として

$$\kappa_{AB}(\lambda)=\kappa_{AB}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$$

のように変形のパラメータが入れられる．カラビ–ヤウ多様体 X に対して定める弦理論 $F_g^X(G)$ はこれらの有限個のパラメータの関数である．

ケーラー形式の変形パラメータは実変数 λ であるが，B-field と呼ばれる場を含めて，複素変数 $t_i=b_i+\sqrt{-1}\lambda_i$ の虚部に自然に収まることが知られている．変数 t_i は複素化されたケーラーパラメータと呼ばれ，$H^2(X,\mathbb{R})+\sqrt{-1}H^2(X,\mathbb{R})$ の元 $B+\sqrt{-1}\kappa$ を表す線型なパラメータである．この拡張に対応して，弦理論 $F_g^X(G)$ は $F_g^X(G,B)$ と少し修正される．

X に対して弦理論 $F_g^X(G,B)$ を直接計算し定めることはほとんど不可能である．しかし，1986 年に物理学者ゲップナーは，$N=2$ 共形場の理論を用いて，いくつかの X とその特別な計量 (G_0,B_0) に対応すると思われる $F_{g=1}^X(G_0,B_0)$ を厳密に求める手法を発見した．当時，弦理論の厳密解として多くの物理学者の関心を集め，そうした研究から 1990 年頃までに明確に認識された現象が次のミラー対称性である．

ミラー対称性予想　X をカラビ–ヤウ多様体として弦理論 $F_g^X(G_X,B_X)$ を定めるとき

$$F_g^X(G_X,B_X)=F_g^Y(G_Y,B_Y) \tag{4}$$

が成り立つようなカラビ-ヤウ多様体 Y と (G_Y, B_Y)，およびその変形の局所パラメータの間の可逆な正則関数

$$\begin{aligned} t_i^X &= \Phi_i(m_1^Y, \cdots, m_r^Y) \qquad (i = 1, \cdots, r) \\ m_k^X &= \Psi_k(t_1^Y, \cdots, t_s^Y) \qquad (k = 1, \cdots, s) \end{aligned} \tag{5}$$

が存在する．

ここで，関係式(5)はミラー写像と呼ばれる．カラビ-ヤウ多様体では K_X が自明であることと，セール双対によって $\dim_{\mathbf{C}} H^1(X, T'X) = h^{n-1,1}(X)$ が成り立つことから，(5)式は

$$h^{1,1}(X) = h^{n-1,1}(Y), \qquad h^{n-1,1}(X) = h^{1,1}(Y)$$

というホッジ数の関係を含んでいる．4章にあったように，カラビ-ヤウ多様体がいったいどれほどあるのかは高次元代数多様体の分類問題として未解決の問題であり，その視点からもミラー対称性は興味深い予想と言える．

3.2　実2次元トーラスの例

第1節で与えた“定義らしきもの”に従って弦理論を実際計算するのはほとんど不可能である．しかし，X が実 $2n$ 次元のトーラスである場合，これを定義に従って“忠実”に計算することができる．その結果は $(2n, 2n)$ 型の符号を持つ偶自己双対な格子——ナレイン(Narain)格子によって完全に記述される．以下では，例として最も簡単な $n=1$ の場合を紹介しよう．

図1に示すように，実座標を (ϕ^1, ϕ^2) とするトーラスに複素構造 $T = T_1 + iT_2$ を入れて対応する複素座標を $w = \phi^1 + T\phi^2$ と表そう．また，ケーラー形式 $\kappa = \dfrac{i}{2}\dfrac{U_2}{T_2} dw \wedge d\bar{w} = U_2 d\phi^1 \wedge d\phi^2$ を与え，B-field と合わせて $B + i\kappa = (U_1 + iU_2) d\phi^1 \wedge d\phi^2$ によって，複素化されたケーラーパラメータ

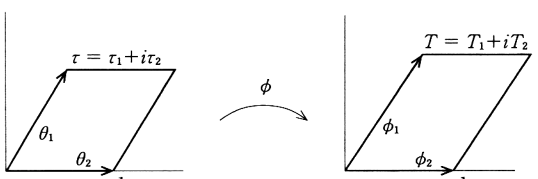


図1　C^∞ 写像 $\phi : \Sigma_1 \to X = E_{T,U}$

$U = U_1 + iU_2$ とする．これら２つの構造を入れたトーラスを $X = E_{T,U}$ と表す．一方で，格子を用いて X を

$$X = \mathbb{R}^2/2\pi\Lambda_{\mathbb{Z}}$$

のように表すことができる．ここで，$\Lambda_{\mathbb{Z}}$ は

$$(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{\frac{U_2}{T_2}}\begin{pmatrix}1 & T_1\\ 0 & T_2\end{pmatrix} \tag{6}$$

で定めるベクトル ξ_1, ξ_2 が生成する格子である．このとき，複素構造 T とケーラー形式 κ が定める計量は $G_{ij} = \xi_i \cdot \xi_j$ と表される．

同様にして実座標を θ^1, θ^2 とする Σ_1 に複素構造 $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ とケーラー形式 $d\theta^1 \wedge d\theta^2$ を入れると，Σ_1 の計量は

$$(h_{ab}) = \frac{1}{\tau_2}\begin{pmatrix}1 & \tau_1\\ \tau_1 & |\tau|^2\end{pmatrix}$$

となる．

以上のデータから，重み関数(2)を書き下すと

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2\theta \frac{1}{\tau_2}(\tau\partial_1 - \partial_2)\phi^i(\bar{\tau}\partial_1 - \partial_2)\phi^j G_{ij}$$

となる $\left(\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial\theta^i}\right)$．経路積分は“すべての C^∞ 写像全体”にわたって行われるが，これは次のように意味づけを与えて実行することができる．まず，C^∞ 写像 $\phi : \Sigma_1 \to X$ をフーリエ級数によって次のように表す $(0 \leqq \theta^i \leqq 1)$；

$$\phi^i(\vec{\theta}) = 2\pi(n_i\theta^1 + m_i\theta^2) + \sum_{k,l} a_{kl}^{(i)} e^{2\pi\sqrt{-1}(k\theta^1 + l\theta^2)}$$

ここで $\phi(\vec{\theta}) = \phi^1(\vec{\theta})\xi_1 + \phi^2(\vec{\theta})\xi_2$ は $X = \mathbb{R}^2/2\pi\Lambda_{\mathbb{Z}}$ 上の点を表すので，係数は実条件 $\bar{a}_{kl}^{(i)} = a_{-k-l}^{(i)}$ を満たし，また整数ベクトル

$$\vec{n} = (n_1, n_2), \qquad \vec{m} = (m_1, m_2)$$

は Σ_1 の１次元サイクルが X に巻き付く回数を表す．このように表すとき経路積分 $\int \mathcal{D}\phi$ を

$$\sum_{\vec{n},\vec{m}} \int \prod_i \prod_{k>0,l} \frac{da_{kl}^{(i)} d\bar{a}_{kl}^{(i)}}{2\pi\sqrt{-1}} \times \prod_{l>0} \frac{da_{0l}^{(i)} d\bar{a}_{0l}^{(i)}}{2\pi\sqrt{-1}} da_{00}^{(i)}$$

のように意味付けする．このとき，積分は容易に実行でき，また途中に現れる無限積も自然に処理できることが分かる．この経路積分の定義と無限積の処理は共形場の理論でしばしば現れるものである．以下に主要な式を

示すので，演習問題として手を動かし，計算の処方がきわめて自然である様子を体感されることをお勧めしたい．

$\phi^i(\vec{\theta})$ のフーリエ級数を用いると $S(h,\phi\,;G)$ は

$$S=S_{\vec{n},\vec{m}}+\frac{2\pi}{\tau_2}\sum_{k,l}|\tau k-l|^2 a_{kl}^{(i)}\bar{a}_{kl}^{(i)}\xi_i\cdot\xi_j$$

と表される．ここで，右辺第１項は巻き付きからの寄与で，$S_{\vec{n},\vec{m}}=\frac{1}{\tau_2}G_{ij}(\tau n_i-m_i)(\bar{\tau}n_j-m_j)$ で与えられる．変数変換

$$a_{kl}^{(i)}\xi_i:=\sqrt{U_2}\begin{pmatrix} z_{kl}^{(1)} \\ z_{kl}^{(2)}\end{pmatrix}$$

を行うと，重み関数 S は

$$S_{\vec{n},\vec{m}}+\frac{2\pi}{\tau_2}\sum_{k,l}|\tau k-l|^2 U_2(z_{kl}^{(1)}\bar{z}_{kl}^{(1)}+z_{kl}^{(2)}\bar{z}_{kl}^{(2)})$$

となり積分はガウス積分

$$\int\frac{d\bar{z}dz}{2\sqrt{-1}}e^{-Az\bar{z}}=\int dxdy\,e^{-A(x^2+y^2)}=\frac{\pi}{A}$$

に帰着する．結果，$\sum_{\vec{n},\vec{m}}da_{00}^{(1)}da_{00}^{(2)}e^{-S_{\vec{n},\vec{m}}}$ のほかに，次の無限積が得られる：

$$\left\{\prod_{k>0,l}\frac{\tau_2}{2\pi U_2|\tau k-l|^2}\prod_{l>0}\frac{\tau_2}{2\pi U_2 l^2}\right\}^2 \tag{7}$$

繰り込み理論でお馴染みのように，場の理論ではいろいろなタイプの無限大が現れるが，物理学者はこのような無限大の扱い方をよく知っている．とくに，上の無限積の扱いはその中でも最もやさしいタイプで，次の公式で処理される：

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2n^2}\right)=\frac{\sin z}{z},\qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{2\pi n^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}$$

第１式は解析学で登場する公式であるが，第２式はゼータ関数

$$\zeta\left(s,\left\{\frac{\beta}{2\pi n^2}\right\}\right):=\sum_{n>0}\left(\frac{\beta}{2\pi n^2}\right)^{-s}$$

を用いて $\prod_{n>0}\frac{\beta}{2\pi n^2}=e^{-\zeta'\left(0,\left\{\frac{\beta}{2\pi n^2}\right\}\right)}$ と定義した値である．これらの値を用いて l に関する無限積を $l>0$ と $l<0$ を一つにまとめて処理すると，(7)式から

$$\frac{U_2}{2\pi\tau_2}\left|\prod_{k>0}\frac{e^{\pi i\tau k}}{1-e^{2\pi i\tau k}}\right|^4=\frac{U_2}{2\pi\tau_2}\frac{1}{|\eta(\tau)|^4}$$

が得られる．ここで，再び無限和の処理 $\sum_{k>0} k = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ を行う．現れた関数 $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n>0} (1-q^n)\ (q = e^{2\pi i\tau})$ はデデキントの η 関数と呼ばれるもので，$\eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i}\,\eta(\tau)$ を満たし，$\eta^{24}(\tau)$ はウエイト 12 のモジュラー形式である．

以上をまとめて，$X = E_{T,U}$ 上の弦理論として

$$F_{g=1}^X = \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{\tau_2^2} \frac{\sqrt{\det G}}{\tau_2 |\eta(\tau)|^4} \sum_{\vec{n},\vec{m}} e^{-S_{\vec{n},\vec{m}}(G,B)} \qquad (8)$$

が得られる．ここで，定数写像に関する積分 $\frac{1}{2\pi}\int da_{00}^{(1)} da_{00}^{(2)}$ が省略してある．また，これまでさぼっていた B-field を何気なく登場させておいた．B-field は

$$S_{\vec{n},\vec{m}}(G,B) = \frac{1}{\tau_2}(G_{ij}+B_{ij})(\tau n_i - m_i)(\bar{\tau} n_j - m_j)$$

の中に現れている．

以上はトーラスという極端に易しい場合の計算例にすぎないが，第 1 節で与えた“定義らしきもの”をまじめに考える動機を与えるには十分であろう．

3.3 ミラー対称性と T 双対性

$X = E_{T,U}$ の場合に $F_{g=1}^X(G,B)$ が決定されたので，これとミラー対称な $F_{g=1}^X(G_Y, B_Y)$ を探してみよう．実は，複素 1 次元のカラビ–ヤウ多様体はトーラス(楕円曲線)しかないので，この場合 Y は X に一致してしまう．しかし，ミラー対称性が T 双対というある幾何学的な操作で説明されるという洞察を得るので大切な例である．

(8)式に現れる和 $\sum_{\vec{n},\vec{m}}$ は Σ_1 の 1 次元サイクルが $X = \mathbb{R}/2\pi\Lambda_{\mathbb{R}}$ に巻き付く写像に由来していた．巻き付き回数を表すベクトル $(\vec{n},\vec{m})$ を $\Lambda_{\mathbb{Z}} \oplus \Lambda_{\mathbb{Z}}$ の元と思うことにしよう．ここで，2 つの格子のうち，一方の格子について“フーリエ変換”を行うと和は格子 $\Lambda_{\mathbb{Z}}^* \oplus \Lambda_{\mathbb{Z}}$ に関するものに置き換わる．これは，ポアソンの和公式として知られる等式，

$$\sum_n e^{-\pi a n^2 + 2\pi i b n} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_n e^{-\frac{\pi(m-b)^2}{a}}$$

を用いることで実行される．この公式を使って(8)式を整理すると，

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{\tau_2^2} \frac{1}{|\eta(\tau)|^4} \sum_{p \in \mathcal{N}_{2,2}} q^{\frac{1}{2}p_L^2} \bar{q}^{\frac{-1}{2}p_R^2} \qquad (9)$$

が得られる．ここに現れる $\mathcal{N}_{2,2}$ はナレイン格子と呼ばれるもので，(2, 2) 型のローレンツ内積を入れるベクトル空間 $\mathbb{R}^{2,2}$ の中で，

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = \mathbf{E}\begin{pmatrix} {}^t\Xi^{-1} & -B \\ 0 & \Xi \end{pmatrix} \tag{10}$$

で定める基底 $\mathbf{e}_i$ が生成する格子である．ただし，

$$\Xi = \sqrt{\frac{U_2}{T_2}}\begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & U_2 \\ -U_2 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，特に $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$ は格子 $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ の基底を定める行列(6)に一致する．また，$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ によって基底を少しだけ回転させている．(9)に現れる和 $\sum_{p \in \mathcal{N}_{2,2}}$ では，ベクトル空間の直和分解 $\mathbb{R}^{2,2} = \mathbb{R}^{2,0} \oplus \mathbb{R}^{0,2}$ に従って p を分解し，それぞれの射影成分 p_L, p_R を決めている $(p = (p_L, p_R))$．

上の行列のブロックの中に現れる ${}^t\Xi^{-1}$ は双対格子 $\Lambda_{\mathbb{Z}}^*$ の基底を定めるので，$B = 0$ のときナレイン格子は $\Lambda_{\mathbb{Z}}^* \oplus \Lambda_{\mathbb{Z}}$ に一致することが分かる．直和 $\Lambda_{\mathbb{Z}}^* \oplus \Lambda_{\mathbb{Z}}$ には，自然に $\Lambda_{\mathbb{Z}}^*$ と $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ の双対形式によって(2, 2)型のローレンツ内積が入るが，このような格子は(1, 1)型の双曲格子 H の直和 $H^{\oplus 2}$ に同型となることが知られている．B-field があると，ナレイン格子は直和 $\Lambda_{\mathbb{Z}}^* \oplus \Lambda_{\mathbb{Z}}$ から少しずれるが，$\mathbb{R}^{2,2}$ でのローレンツ内積に関して

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_4 = 1$$
$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \qquad (\text{その他の } i \leqq j)$$

が成り立つので，$\mathcal{N}_{2,2} \cong H^{\oplus 2}$ である．この内積の性質は，行列(10)がローレンツの内積に関する直交行列 $O(2,2\,;\mathbb{R})$ に属することを表す．また，弦理論(9)は明らかに分解 $\mathbb{R}^{2,2} = \mathbb{R}^{2,0} \oplus \mathbb{R}^{0,2}$ を保つ群作用 $O(2\,;\mathbb{R}) \times O(2\,;\mathbb{R})$ で不変で，この作用は行列(10)に左から作用する．さらに，整数を成分とする直交行列 $O(2,2\,;\mathbb{Z})$ は，ナレイン格子の同型として，行列(10)に右から作用する．以上のことから，基底を定める(10)に含まれる4つのパラメータ T_1, T_2, U_1, U_2 は

$$\mathcal{M}_{2,2} = O(2\,;\mathbb{R}) \times O(2\,;\mathbb{R}) \backslash O(2,2\,;\mathbb{R}) / O(2,2\,;\mathbb{Z})$$

の座標と理解される．ここに現れる直交群とその商は，Ⅳ型対称領域と呼ばれるものの一例で，この場合は特に易しく

$$O(2\,;\mathbb{R}) \times O(2\,;\mathbb{R}) \backslash O(2,2\,;\mathbb{R}) \cong \mathbf{H}_+ \times \mathbf{H}_+$$

のように2つの上半平面の直積に等しいことが示される．この2つの上半

平面の複素座標が $T = T_1 + iT_2$, $U = U_1 + iU_2$ にほかならない．ナレイン格子の同型を表す群 $O(2,2\,;\mathbb{Z})$ についても，これが各上半平面に作用する $PSL(2,\mathbb{Z})$ と共に，

$$\begin{aligned}(T,U) &\longleftrightarrow (-\bar{T},-\bar{U}),\\ (T,U) &\longleftrightarrow (U,T)\end{aligned} \tag{11}$$

によって生成されるとことが示される[3]．同型群 $O(2,2\,;\mathbb{Z})$ のことを T **双対群**と呼んでいる．この群はナレイン格子の同型群であるから，したがって弦理論 $F^X_{g=1}(G,B)$ はその作用の下で不変である．

ここで，T 双対群の作用を幾何学的に解釈してみよう．まず，T に作用する $PSL(2,\mathbb{Z})$ はトーラスの複素構造に働くお馴染みの作用(Dehn twist)である．また(11)の第1式の作用は，$X = E_{T,U}$ のケーラー形式 κ の符号を変えるので，これは X の向き付けを反対にする作用と理解される．ところが，(11)の第2式は，複素構造 T と複素化したケーラー形式のパラメータ U を入れ換えていて，このような作用は X の幾何学では(閉じて)解釈されない．

T 双対変換 $(T,U) \longleftrightarrow (U,T)$ が，X の幾何学では閉じて解釈されない様子を直感的に理解するために，

$$T_2 = \frac{R_2}{R_1}, \qquad U_2 = R_1R_2, \qquad T_1 = U_1 = 0$$

という特別な場合を考えてみよう．この場合，問題の変換は $R_1 \leftrightarrow \dfrac{1}{R_1}$ によって表されることが分かる．また，X の計量は次のように

$$(G_{ij}) = (\xi_i \cdot \xi_j) = \begin{pmatrix} R_1^2 & 0 \\ 0 & R_2^2 \end{pmatrix}$$

2つの半径が R_1, R_2 である円周 S^1 の直積となる．1つの円周を $S^1 = \mathbb{R}/2\pi R_1\mathbb{Z}$ と表すとき，その双対な円周が $(S^1)^\vee = \mathbb{R}\Big/\left(2\pi\dfrac{1}{R_1}\mathbb{Z}\right)$ によって定まる．図2を観察し，変換 $R_1 \leftrightarrow \dfrac{1}{R_1}$ がミラー対称性を表すことを納得されたい．

このように，問題の T 双対変換は X の幾何学にとどまらないが，X をトーラスによるファイバー空間として表し，ファイバーに現れる(実)トーラスをすべて双対なトーラスに置き換える幾何学的な操作と理解される．今の場合，これによって再び2次元トーラス Y が得られて，これが X ミ

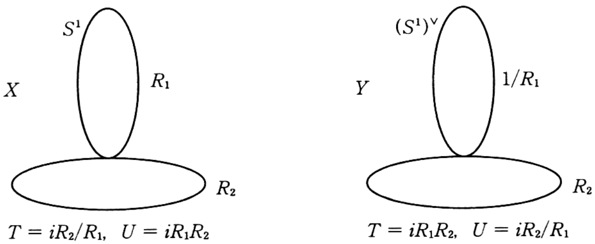


図2　T **双対変換** $R_1 \longleftrightarrow \frac{1}{R_1}$ **の幾何学的描像**

ラー対称なカラビ-ヤウ多様体となるのである．

ストロミンジャー-ヤウ-ザスロウ[4]は1996年に，このようなファイバー空間に基づく描像が高次元カラビ-ヤウ多様体についても成り立ち，それによってミラー対称な Y が決められるというアイデアを提唱して注目を集めた．現在ではそのアイデアは広く受け入れられ3人にちなんで SYZ **構成**(予想)と呼ばれている．SYZ 構成では，X をファイバー空間として表す(実)トーラスは特殊ラグランジュ部分多様体であることが要請されるために，問題が格段に難しくなるが，複素幾何とシンプレクティック幾何にまたがる，大きな未解決問題として今後の発展が期待されている．

3.4　正則曲線の数え上げ

ミラー対称性の大切な応用として，カラビ-ヤウ多様体の正則曲線の数え上げ問題がある．量子コホモロジーやグロモフ-ウィッテン不変量として既に解説されているので，ここでは弦理論の“定義らしきもの”と結びつけたいと思う．弦理論 $F_g^X(G,B)$ は，C^∞ 写像 $\phi : \Sigma_g \to X$ に関する経路積分 $\int \mathcal{D}\phi$ とモジュライ空間上の積分 $\int d^{6g-6}m$ から成る．したがって，適当な操作によって C^∞ 写像に関する和を正則写像 $\phi : \Sigma_g \to X$ に縮小して正則曲線の数え上げをすることができる．都合の良いお話に思われるが，経路積分をこのように縮小する一般的な議論がウィッテン[5]によって作られていて，位相的場の理論とか位相的極限と呼ばれている．本章では省略しているフェルミオンとボゾンの対称性を用いるもので，大まかにいって両者を互いに相殺させて目的の部分だけを取り出す操作である．

$X = E_{T,U}$ の場合にこの操作を行うと，$F_{g=1}^X$ の正則写像 $\phi : \Sigma_1 \to X$ への

縮小は

$$F_{g=1}^{top} = \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{\tau_2^2} \frac{\tau_2}{2} \sum_{p \in \mathcal{N}_{2,2}} q^{\frac{1}{2}p_L^2} \bar{q}^{\frac{-1}{2}p_R^2}$$

となる．この理論の縮小は，1993 年に有名な論文[1]でウイッテン指数の一般化として導入され，さらに $g>1$ への拡張がなされている(BCOV アノマリー方程式)．積分は上半平面の基本領域 $\mathcal{F}$ で行うが，$\mathcal{N}_{2,2}$ が自己双対な格子なので被積分関数は τ_2 と合わせてモジュラー不変である．積分を詳しく調べると発散積分であることが分かるが，その物理的意味ははっきりしていて，発散する定数を除いて有限部分に

$$F_{g=1}^{top} = -\log \sqrt{U_2}\,|\eta(U)|^2 - \log \sqrt{T_2}\,|\eta(T)|^2$$

が得られる．結果がⅣ型対称領域上のモジュラー形式で表され，これらの不変な組合せでパラメータの空間 $\mathcal{M}_{2,2}$ 上の関数となっていることを観察されたい．実は，この形は $\mathcal{M}_{2,2}$ 上の正則直線束のノルムという形をしていて，正則曲線の数え上げ関数としては正則切断の部分 $-\log \eta(U)$ を取り出す．その結果は，別に計算される $X=E_{T,U}$ に関するグロモフ-ウィッテン不変量の母関数に一致することが確かめられる．

K3 曲面と $E_{T,U}$ の直積空間 $\mathrm{K3} \times E_{T,U}$ はカラビ-ヤウ多様体であるが，この多様体上でヘテロティック弦理論というものを考えると，そのパラメータの空間はこれまでと同様にⅣ型対称領域に関連する $\mathcal{M}_{r+2,2}$ となる．この場合に物理学者ハーベイとムーア[2]は，積分 $F_{g=1}^{top}$ に $O(r+2,2;\mathbb{Z})$ に関する保型形式が現れることを示して見せた．正確には，保型形式は格子 $M \oplus H^{\oplus 2}$ とその自己同型群 $O(M \oplus H^{\oplus 2})$ に関するものが現れる．

ピカール群がある格子と同型な格子を含む K3 曲面は，格子偏極 K3 曲面と呼ばれている．弦理論の双対性というアイデアに基づくと，ヘテロティック弦理論から得られる $F_{g=1}^{top}$ は，$M \oplus H$ 偏極 K3 曲面をファイバー空間とする 3 次元カラビ-ヤウ多様体のグロモフ-ウィッテン不変量の母関数に一致することが予想され，また実際にいくつかの具体例で確かめられ，異なる弦理論の間の対称性として関心が持たれている[2]．

4　おわりに

経路積分による弦理論の“定義”と，それが実際に計算ができる例を取り

上げ，ミラー対称性を紹介した．数学的には意味不明と思われる経路積分も，（物理的？）背景がはっきりしている場合には，そこから実に実り多い数学の題材が出てくること，特にミラー対称性はその代表的なケースであることが少しでも伝わったなら幸いである．

参考文献

[1] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. **165** (1994) 311-428.

[2] J. A. Harvey, G. Moore, *BPS States, and Strings*, Nucl. Phys. **B463** (1996) 315-368.

[3] よく知られた事実であるが，例えば次の文献の Appendix が便利である．

S. Hosono, B.H. Lian, K. Oguiso and S.-T. Yau, *$c=2$ Rational Toroidal Conformal Field Theories via Gauss Product*, Commun. Math. Phys. **241** (2003), 245-286.

[4] A. Strominger, S.-T. Yau and E. Zaslow, *Mirror Symmetry is T-Duality*, Nucl. Phys. **B479** (1996) 243-259.

[5] E. Witten, *Mirror manifolds and topological field theories*, in *Essays on Mirror Manifolds*, S.-T. Yau ed., International Press (1992).

［ほその　しのぶ］

7 トーリック幾何とカラビ-ヤウ多様体

今野 宏
[東京大学大学院数理科学研究科]

1 はじめに

ミラー対称性は，1990年頃に超弦理論の研究から発見されました．超弦理論では，空間は10次元で，4次元時空と目に見えないほど小さい6次元(＝複素3次元)のカラビ-ヤウ多様体とに分かれています．4次元時空で観測されるさまざまな量子論的な効果が，このカラビ-ヤウ多様体の幾何からの寄与として表されます．したがって，ミラー対称性は，カラビ-ヤウ多様体の持つさまざまな幾何学的性質を予言します．1章で江口徹氏により解説されていたように，キャンデラスたちはミラー対称性を用いて，4次元射影空間の5次超曲面の有理曲線の数を予言して，数学者に大きな衝撃を与えました．

カラビ-ヤウ多様体はリッチ曲率が零となるケーラー多様体のことです．ケーラー多様体とは，大雑把に言って，複素構造とシンプレクティック構造の両方を持ち，両者がある整合性を満たすものです．4章で並河良典氏はカラビ-ヤウ多様体を複素多様体の視点から解説していました．一方，カラビ-ヤウ多様体は，シンプレクティック多様体でもあります．2章で深谷賢治氏により解説されていたグロモフ-ウィッテン不変量は，シンプレクティック多様体としての不変量です．**ミラー対称性**とは，カラビ-ヤウ多様体がひとつ与えられたときに，そのミラー多様体と呼ばれる別のカラビ-ヤウ多様体が存在して，一方の複素幾何と，他方のシンプレクティック幾何が対応する，というものです．すなわち，カラビ-ヤウ多様体のシンプレクティック幾何を調べたいのならば，そのミラー多様体の複素幾何を調べればよい，ということになります．先に述べたキャンデラスたちの仕事は，5次超曲面のグロモフ-ウィッテン不変量を，そのミラー多様体の周期(これは複素幾何的なものです)を計算することにより求めた，と言い換える

ことができます．

数学におけるミラー対称性の研究の出発点は，カラビ-ヤウ多様体が与えられたときに，そのミラー多様体を実際に構成して，ミラー対称性から予言されることが本当に成り立っているかどうかを確かめることでした．この記事の標題にある**トーリック幾何学**は，この段階で大変有効になった手段です．トーリック幾何とはトーリック多様体と呼ばれる空間の幾何ですが，その部分多様体としてカラビ-ヤウ多様体が構成されます．そのカラビ-ヤウ多様体の性質は，トーリック幾何学により記述されます．そしてミラー多様体も具体的に構成されます．この章では，このようなトーリック幾何とミラー対称性との関わりを説明していこうと思います．この章と関連する多くの記事が[1]にあります．興味を持たれた方はぜひ参照してください．

2 トーリック多様体とは

n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ とは $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ を $\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ の作用で割った商空間で，複素多様体となっています．すなわち $\mathbb{C}P^n=(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\})/\mathbb{C}^\times$ です．$\mathbb{C}^{n+1}$ には $(\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ が自然に作用していますから，$\mathbb{C}P^n$ にはトーラス $T_{\mathbb{C}}^n=(\mathbb{C}^\times)^{n+1}/\mathbb{C}^\times$ が複素構造を保って作用しています．このとき，$[1:1:\cdots:1]\in\mathbb{C}P^n$ を通るトーラス $T_{\mathbb{C}}^n$ の軌道 $T_{\mathbb{C}}^n[1:1:\cdots:1]$ は $\mathbb{C}P^n$ の中で稠密になっています．したがって $\mathbb{C}P^n$ はトーラス $T_{\mathbb{C}}^n$ を，その群構造と整合的にコンパクト化したものとなっています．このような空間をトーリック多様体といいます．トーリックとは「トーラスの」という意味の造語のようです．

一般に**トーリック多様体** $X(\Sigma)$ は，$\mathbb{C}^d$ からその部分集合 $Z(\Sigma)$ をとり除いたものを $(\mathbb{C}^\times)^d$ の部分トーラス $K_{\mathbb{C}}$ で割った商空間[1)]として構成されます．すなわち

$$X(\Sigma)=(\mathbb{C}^d\backslash Z(\Sigma))/K_{\mathbb{C}} \tag{1}$$

です．ここで，集合 $Z(\Sigma)$ や部分トーラス $K_{\mathbb{C}}$ は扇と呼ばれるある組合せ論的なデータによって定められます．以後扇 Σ によって与えられるトー

1）正確には categorical quotient という商空間です．

リック多様体を $X(\Sigma)$ と表します．このとき，$X(\Sigma)$ には，商トーラス $T_{\mathbb{C}}^n = (\mathbb{C}^\times)^d / K_{\mathbb{C}}$ が作用し，稠密な軌道を持っていることが確かめられます．

これらのことをもう少し詳しく説明しましょう．まず，格子 $N \cong \mathbb{Z}^n$ と，それを含む n 次元実ベクトル空間 $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ を考えましょう．有理多面錘 σ とは，有限個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s \in N$ によって張られる錘

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i \boldsymbol{v}_i \in N_{\mathbb{R}} \middle| a_i \geqq 0 \right\} \subset N_{\mathbb{R}} \tag{2}$$

で，$\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ を満たすものです．$N_{\mathbb{R}}$ 内の扇 Σ とは，有限個の有理多面錘からなる集合で，

1. Σ に属する有理多面錘 σ の面は Σ に属する，
2. Σ に属する有理多面錘 σ_1, σ_2 の共通集合 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ は σ_1 の面であると同時に σ_2 の面でもある，

を満たすものです．

2 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^2$ に対応する扇 Σ は次のようになります．格子 $N \cong \mathbb{Z}^2$ 内の点

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,0), \qquad \boldsymbol{v}_2 = (0,1), \qquad \boldsymbol{v}_3 = (-1,-1)$$

をとると，

$$\Sigma = \{\sigma_I \mid I \subsetneqq \{1,2,3\}\} \tag{3}$$

は扇になります(図 1)．ここで

$$\sigma_I = \left\{ \sum_{i \in I} a_i \boldsymbol{v}_i \in N_{\mathbb{R}} \middle| a_i \geqq 0 \right\} \tag{4}$$

です．$\boldsymbol{v}_i = (v_{i1}, v_{i2})$ とするとき，代数的トーラスの間の準同型写像 ϕ : $(\mathbb{C}^\times)^3 \to (\mathbb{C}^\times)^2$ が

$$\phi((z_1, z_2, z_3)) = \left(\prod_{i=1}^{3} z_i^{v_{i1}}, \prod_{i=1}^{3} z_i^{v_{i2}} \right) = (z_1 z_3^{-1}, z_2 z_3^{-1}) \tag{5}$$

により定まります．このとき $(\mathbb{C}^\times)^3$ の部分トーラス $K_{\mathbb{C}}$ を準同型写像 ϕ による単位元の逆像

$$K_{\mathbb{C}} = \phi^{-1}((1,1)) = \{(z,z,z) \mid z \in \mathbb{C}^\times\} \tag{6}$$

として定義します．$\sigma_I \in \Sigma$ に対して

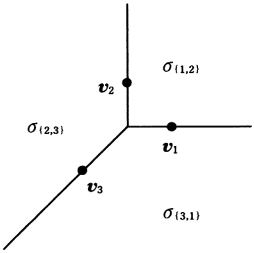


図1　Σ

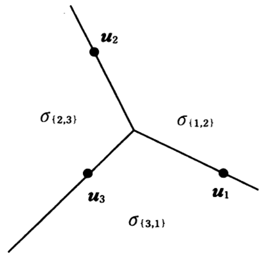


図2　Σ°

$$Z(\sigma_I) = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in (\mathbb{C}^\times)^3 \middle| \prod_{i \notin I} z_i = 0\right\} \tag{7}$$

とします．たとえば $Z(\sigma_{\{1,2\}}) = \{(z_1, z_2, 0)\}$ です．このとき

$$Z(\Sigma) = \bigcap_{\sigma_I \in \Sigma} Z(\sigma_I) \tag{8}$$

と定義すると，$Z(\Sigma) = \{(0,0,0)\}$ となります．このとき，

$$X(\Sigma) = (\mathbb{C}^3 \backslash Z(\Sigma))/K_{\mathbb{C}}$$

は $\mathbb{C}P^2$ です．また，$X(\Sigma)$ には商トーラス $T_{\mathbb{C}}^2 = (\mathbb{C}^\times)^3/K_{\mathbb{C}}$ が作用しています．

また，任意の $\sigma_I \in \Sigma$ に対して，

$$U_{\sigma_I} = (\mathbb{C}^3 \backslash Z(\sigma_I))/K_{\mathbb{C}} \tag{9}$$

は $X(\Sigma)$ の開集合で，単純な構造を持っています．たとえば $U_{\sigma_{\{1,2\}}} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in X(\Sigma) \mid z_3 \neq 0\}$ は $\left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3}\right)$ が座標となり，$\mathbb{C}^2$ となることがわかります．また，$\sigma_I \subset \sigma_J$ ならば自然に $U_{\sigma_I} \subset U_{\sigma_J}$ が成り立ち，

$$X(\Sigma) = \bigcup_{\sigma_I \in \Sigma} U_{\sigma_I} \tag{10}$$

となっています．すなわち，トーリック多様体 $X(\Sigma)$ は U_{σ_I} たちを貼り合わせたもので，その貼り合わせ方は扇 Σ の構造によって定まります．このように，トーリック多様体 $X(\Sigma)$ の幾何的なさまざまな性質は，扇 Σ の組合せ論的な性質として容易に記述することができます．

あとで重要となる例をもうひとつあげておきます．格子 $N \cong \mathbb{Z}^2$ 内の点

$$\boldsymbol{u}_1 = (2, -1), \qquad \boldsymbol{u}_2 = (-1, 2), \qquad \boldsymbol{u}_3 = (-1, -1)$$

をとるとき(図2)，

$$\Sigma^\circ = \{\sigma_I \mid I \subsetneq \{1, 2, 3\}\} \tag{11}$$

は扇になります．ここでσ_Iは(4)と同様に与えられます．このとき，準同型写像ϕ：$(\mathbb{C}^\times)^3 \to (\mathbb{C}^\times)^2$は

$$\phi((z_1, z_2, z_3)) = (z_1^2 z_2^{-1} z_3^{-1}, z_1^{-1} z_2^2 z_3^{-1}) \tag{12}$$

となります．また$K_\mathbb{C} = \{(z_1, z_2, z_3) \in (\mathbb{C}^\times)^3 | z_1^3 = z_2^3 = z_1 z_2 z_3\}$です．$K_\mathbb{C}^0$を$K_\mathbb{C}$の単位元を含む連結成分とするとき，$K_\mathbb{C}/K_\mathbb{C}^0 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$であることに注意してください．また，$Z(\Sigma^\circ) = \{(0,0,0)\}$となります．したがって，$X(\Sigma^\circ) = \mathbb{C}P^2/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$となります．

3　シンプレクティック多様体として

前節では，トーリック多様体の複素多様体としての側面を見てきました．次にトーリック多様体のシンプレクティック多様体としての側面を紹介しましょう．

多様体M上の**シンプレクティック構造**ωとは，非退化な2次微分形式のことです．M上のベクトル場Xに対して$\omega(X, \cdot)$はM上の1次微分形式ですが，このωの定めるベクトル場から1次微分形式への対応が同型対応であるときωを非退化といいます．リー群Gがシンプレクティック構造ωを保ってMに作用しているとき，**シンプレクティック商**と呼ばれるMのGによるある特別な商空間が次のように定義されます．GがMに作用しているとGのリー環[2)] $\mathfrak{g}$の元XはM上のベクトル場$\underline{X}$を定めます．このときG同変な写像μ_G：$M \to \mathfrak{g}^*$で任意の$X \in \mathfrak{g}$に対し$\omega(\underline{X}, \cdot) = -d\langle \mu_G(\cdot), X \rangle$をみたすものをモーメント写像といいます．ここで$\langle \cdot, \cdot \rangle$：$\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$は自然なペアリング，$\langle \mu_G(\cdot), X \rangle$は$M$上の関数で，$d$は外微分作用素です．このとき$\mu_G^{-1}(0)/G$は自然なシンプレクティック構造を持ちます．この商空間をシンプレクティック商と呼びます．

前節でトーリック多様体

$$X(\Sigma) = (\mathbb{C}^d \backslash Z(\Sigma))/K_\mathbb{C}$$

を説明しました．$K_\mathbb{C}$は代数的トーラス$(\mathbb{C}^\times)^d$の部分トーラスでした．$S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^\times$とするとき，実トーラス$(S^1)^d \subset (\mathbb{C}^\times)^d$は$\mathbb{C}^d$の標準的なシンプレクティック構造$\omega$を保って作用しています．このとき，多くの場合に$X(\Sigma)$は$\mathbb{C}^d$の実部分トーラス$K = (S^1)^d \cap K_\mathbb{C}$によるシンプレクティック商になっています．すなわち，μ_K：$\mathbb{C}^d \to k^*$をうまくと

ると
$$X(\Sigma) = (\mathbb{C}^d \backslash Z(\Sigma))/K_{\mathbb{C}} = \mu_K^{-1}(0)/K \tag{13}$$
となっています．さらに実商トーラス
$$T^n = (S^1)^d/K \subset T^n_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^\times)^d/K_{\mathbb{C}}$$
は $X(\Sigma)$ 上のシンプレクティック構造を保って作用しています．この作用のモーメント写像 $\mu_{T^n}: X(\Sigma) \to (t^n)^*$ の像 $\Delta = \mathrm{Im}\,\mu_{T^n} \subset (t^n)^*$ は**凸多面体**となっています．ここで，t^n は商トーラス $T^n = (S^1)^d/K$ のリー環ですが，これは自然に $N_{\mathbb{R}}$ と同一視されます．したがって，凸多面体 Δ は $(t^n)^* = (N_{\mathbb{R}})^*$ の部分集合になります．この凸多面体 $\Delta \subset (N_{\mathbb{R}})^*$ から扇 $\Sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ を，よって $X(\Sigma)$ を再構成することができます．さらに $X(\Sigma)$ 上のシンプレクティック構造も再構成することができます．以後，凸多面体 Δ が定めるトーリック多様体を $X(\Delta)$ と表します．

このようにトーリック多様体は複素幾何的な側面とシンプレクティック幾何的な側面の両方を持ち合わせた空間です．ですから，トーリック多様体がミラー対称性において重要な役割を演じるのは，自然なことなのかも知れません．

4　ミラー多様体の構成

複素多様体 M で，その第1チャーン類 $c_1(M) \in H^2(M;\mathbb{R})$ が正であるものをファノ多様体と呼びます．第1チャーン類が複素構造と整合的なシンプレクティック構造により表される，ということです．このとき，反標準因子[3)]は，特異点がなければカラビ-ヤウ多様体になります．

格子 $N \cong \mathbb{Z}^n$ と，それを含む n 次元実ベクトル空間 $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ を考えていました．このとき，双対格子 $N^* \cong \mathbb{Z}^n$ と，それを含む n 次元実ベクトル空間 $(N_{\mathbb{R}})^* \cong \mathbb{R}^n$ が定まります．凸多面体 $\Delta \subset (N_{\mathbb{R}})^*$ の極双対 $\Delta^\circ \subset N_{\mathbb{R}}$ とは
$$\Delta^\circ = \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid \text{任意の } u \in \Delta \text{ に対して } \langle u, v\rangle \geqq -1\} \tag{14}$$

2)　G の単位元の接空間に，リー括弧積という代数的な構造を持たせたもの．

3)　反標準束 K^*_M，すなわち $c_1(K^*_M) = c_1(M)$ となる M 上の正則直線束，の正則切断の零点として表される M の超曲面．

により定まる凸多面体です．双対格子 N^* に頂点をもつ凸多面体 $\Delta \subset (N_{\mathbb{R}})^*$ が**反射的多面体**であるとは，$(N_{\mathbb{R}})^*$ の原点が Δ の内部にあり，かつ極双対 $\Delta^\circ \subset N_{\mathbb{R}}$ の頂点が N の点であることをいいます．反射的多面体 Δ の定めるトーリック多様体 $X(\Delta)$ は，ある種の特異点を持つファノ多様体になります．さらに Δ が定める $X(\Delta)$ のシンプレクティック構造は $c_1(X(\Delta)) \in H^2(X(\Delta);\mathbb{R})$ の代表元になります．

さて，2次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^2$ はファノ多様体ですが，この空間を定める凸多面体 $\Delta \subset (N_{\mathbb{R}})^*$ の頂点は，$\boldsymbol{u}_1 = (2,-1)$，$\boldsymbol{u}_2 = (-1,2)$，$\boldsymbol{u}_3 = (-1,-1) \in N^* \cong \mathbb{Z}^2$ です(図3)．Δ の極双対 $\Delta^\circ \subset N_{\mathbb{R}}$ の頂点は $\boldsymbol{v}_1 = (1,0)$，$\boldsymbol{v}_2 = (0,1)$，$\boldsymbol{v}_3 = (-1,-1)$ となり(図4)，Δ が反射的多面体であることがわかります．2節では，これらのベクトルから，$\mathbb{C}P^2$ を定める扇 Σ を構成しましたが，Δ° の頂点と，Σ に属する1次元有理多面錘(この場合は原点を始点とする半直線)が対応しています．さらに，Δ° の辺と Σ に属する2次元有理多面錘が対応しています．このように，$X(\Delta) = \mathbb{C}P^2$ を定める扇 Σ は極双対 Δ° 上の錘として実現されます．以上まとめると，$\mathbb{C}P^2 = X(\Sigma) = X(\Delta)$ で，Σ は Δ° 上の錘になっています．

今度は，この例で，N と N^* の立場を逆転してみましょう．$\Delta^\circ \subset N_{\mathbb{R}}$ の極双対 $(\Delta^\circ)^\circ \subset (N_{\mathbb{R}})^*$ を考えると，$(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$ となります．したがって，Δ° も反射的多面体になります．さらにトーリックファノ多様体 $X(\Delta^\circ)$ に対応する扇は，$(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$ 上の錘ですから，これはちょうど2節の最後に述べた例 Σ° になります．すなわち $X(\Delta^\circ) = X(\Sigma^\circ) = \mathbb{C}P^2/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ です．

以上のように反射的多面体 Δ が与えられると，トーリックファノ多様体 $X(\Delta)$ が得られると同時に，極双対 Δ° から，別のトーリックファノ多様体

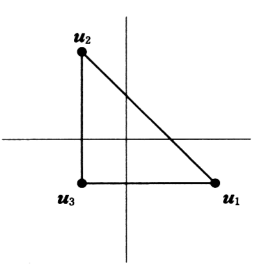


図3　Δ

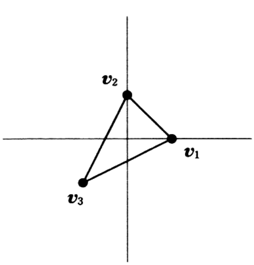


図4　Δ°

$X(\Delta^\circ)$が得られます．$X(\Delta)$の反標準因子としてカラビ-ヤウ多様体が得られることが期待されますが，一般には，$X(\Delta)$は特異点を持っており，その超曲面も特異点を持っています．ところが，この特異点はある自然な方法で少なくとも部分的には解消でき，カラビ-ヤウ多様体Mが得られます．特に3次元では特異点のないカラビ-ヤウ多様体が得られます．一方，$X(\Delta^\circ)$の反標準因子の特異点を解消して，カラビ-ヤウ多様体M°が得られます．実は，このMとM°が互いの**ミラー多様体**になっていることが期待されます．実際にMが3次元の場合に，

$$h^{2,1}(M) = h^{1,1}(M^\circ), \qquad h^{1,1}(M) = h^{2,1}(M^\circ) \tag{15}$$

が成り立ちます．この事実は，位相的ミラー対称性と呼ばれ，ミラー対称性が予言する最も基本的な事実です．

グリーンとプレッサーは物理的な考察のもとに，4次元射影空間の5次超曲面などに対して，これを有限群で割ることにより，ミラー多様体が構成できることを示していました．バチレフはこの構成法をトーリック幾何の枠組みで捉え直して，上記のようなミラー多様体の構成方法を発見し，(15)を示しました．実際に頂点が

$$\boldsymbol{v}_1 = (4,-1,-1,-1), \qquad \boldsymbol{v}_2 = (-1,4,-1,-1),$$
$$\boldsymbol{v}_3 = (-1,-1,4,-1), \qquad \boldsymbol{v}_4 = (-1,-1,-1,4),$$
$$\boldsymbol{v}_5 = (-1,-1,-1,-1),$$

を頂点に持つ凸多面体$\Delta \subset (N_{\mathbb{R}})^* \cong \mathbb{R}^4$は，反射的多面体ですが，この構成法を適用すると，

$$X(\Delta) = \mathbb{C}P^4, \qquad X(\Delta^\circ) = \mathbb{C}P^4/(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$$

となります．$\mathbb{C}P^4$の反標準因子は5次超曲面です．$\mathbb{C}P^4/(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$の反標準因子の特異点解消として，5次超曲面のミラー多様体が得られます．

バチレフの構成法により，組織的にミラー多様体が構成できるようになりました．この構成方法は，トーリック多様体の完全交叉などに拡張され，互いにミラー多様体となっているカラビ-ヤウ多様体の組が数多く得られています．

5　ミラー対称性

以上により，ミラー多様体，より正確にはミラー多様体となることが期

待されるものが構成されたので，次にすべきことは，ミラー対称性が予言する事実をこれらに対して確かめることです．Mを3次元カラビ-ヤウ多様体とするとき，(15)の意味を考えてみましょう．$h^{2,1}(M^\circ)$はMのミラー多様体M°の複素構造の変形の空間$\mathcal{M}_{\mathrm{cpx}}(M^\circ)$の次元です．一方$h^{1,1}(M)$は$M$の(複素化された)ケーラー計量の変形の空間$\mathcal{M}_{\mathrm{kah}}(M)$，すなわち$M$のシンプレクティック構造の変形の空間の次元です．(15)はこの2つの空間の次元が等しいことを主張しています．

$\mathcal{M}_{\mathrm{kah}}(M)$には，large radius limit と呼ばれる，ある無限遠点が存在します．一方，$\mathcal{M}_{\mathrm{cpx}}(M^\circ)$には，large complex structure limit と呼ばれる無限遠点が存在します．ミラー対称性の主張は，これらの無限遠の近傍の間の自然な同型写像が存在することです．**ミラー変換**と呼ばれるこの同型写像は，次のようにM°のシンプレクティック幾何とM°の複素幾何を対応させています．まず，これらの無限遠点の近傍は，それぞれある自然な座標系を持ち，しかもこれらはミラー変換のもとで対応します．さらに，Mの定めるAモデルの湯川結合と，M°の定めるBモデルの対応する湯川結合とが，このミラー変換のもとで等しくなります．以上が古典的**ミラー対称性**の主張です．Mの定めるAモデルの湯川結合とは，Mの有理曲線の数，より正確にはMの種数0のグロモフ-ウィッテン不変量から定まる量で，Mのシンプレクティック幾何により定まります．一方M°の定めるBモデルの湯川結合とは，M°の周期積分から定まる複素幾何的な量です．1章で解説されていたキャンデラスたちの仕事は，Mが5次超曲面の場合にこのミラー変換を具体的に記述し，さらにM°の定めるBモデルの湯川結合を具体的に計算することにより，Mの定めるAモデルの湯川結合の値を予言する，というものでした．

カラビ-ヤウ多様体Mがトーリックファノ多様体$X(\Delta)$の反標準因子の特異点解消として得られる場合には，そのミラー多様体M°が$X(\Delta^\circ)$の反標準因子の特異点を解消して得られていました．このとき，$\mathcal{M}_{\mathrm{kah}}(M)$における large radius limit は，$X(\Delta)$の幾何から容易に記述することができます．一方，$\mathcal{M}_{\mathrm{cpx}}(M^\circ)$は，$X(\Delta^\circ)$の反標準束の正則切断の空間をもとに記述することができます．M°の周期積分は，$\mathcal{M}_{\mathrm{cpx}}(M^\circ)$の上の正則関数となりますが，GKZ(ゲルファント-カプラノフ-ゼレビンスキー)方程式系と呼ばれる微分方程式系を満たすことが知られています．large complex struc-

ture limit という無限遠点は，この周期積分のモノドロミーの最大退化点のことで，この微分方程式系を調べることにより見つけることができます．さらに，この微分方程式の解を用いて，この無限遠点の近傍での自然な座標系を構成し，ミラー変換と，B モデルの湯川結合を求めることができます．こうしてBモデルは，従来からある複素幾何の手法を発展させて調べることができました．一方 A モデルについては，グロモフ-ウィッテン不変量の理論を建設することなど重要な問題がありましたが，とうとう 1996 年頃にギベンタール，少し遅れてリャン-リュー-ヤウは，トーラス作用を利用することにより，A モデルの湯川結合を求めることに成功しました．こうして，カラビ-ヤウ多様体 M がトーリックファノ多様体 $X(\Delta)$ の反標準因子の特異点解消として得られる場合には，A モデル，B モデルの湯川結合をそれぞれ別々に計算することにより，古典的ミラー対称性の主張が証明されました．

6　SYZ予想

第 4 節でトーリック多様体の反標準因子の特異点解消として得られるカラビ-ヤウ多様体 M のミラー多様体 M° の構成方法を説明しました．この方法は具体的で，実際の計算には大変便利ですが，トーリック幾何の言葉で記述されているため，M と M° の内在的な関係はよく見えません．ストロミンジャー-ヤウ-ザスロウは，M から M° を構成する次のような方法を提唱しました．M は large complex structure limit の近くでは，半分次元のトーラスによるファイブレーションの構造を持ち，M° はその双対トーラスによるファイブレーションの全空間として実現される，というものです．この方法は **SYZ 予想**(構成)と呼ばれ，M と M° の内在的な関係を表す強力なものです．さらに，ファイバーのトーラスは特殊ラグランジュ部分多様体となる，あるいはもう少し弱く large complex structure limit に近づくにつれて特殊ラグランジュ部分多様体に近づいてゆくことが要請され，微分幾何学的にも大変興味深い予想です．ただし，このトーラスファイブレーションの特異ファイバーの構造はまだよく理解されていないため，この構成法は数学としては十分に定式化がされていません．もともとこの予想は，ミラー対称性は T-双対である，という物理的考察に基礎をおく

もので，この考察は6章で細野忍氏により丁寧に解説されています．

カラビ-ヤウ多様体 M がトーリック多様体 $X(\Delta)$ の超曲面から構成されるときは，このようなトーラスファイブレーションがルアン，ジャルコフらにより構成されています．このトーラスファイブレーションは $X(\Delta)$ のモーメント写像 $\mu_{T^n}: X(\Delta) \to (t^n)^*$ の M への制限に近いものです．$X(\Delta)$ の超曲面の μ_{T^n} による像は何やらアメーバのような形をしており，数学上の用語としても実際にこの名前で呼ばれています．アメーバは，ミラー対称性，トロピカル幾何，実代数幾何などと結びつき，現在活発に研究されています．

7 おわりに

こうして，超弦理論で発見されたミラー対称性は，例が数多く構成されて，数学的にもその片鱗が見えてきました．けれども上の古典的ミラー対称性の証明は，2つの量を別々に計算して結果的にその2つが等しいことがわかった，というもので，等しくなる根本的な理由がわかったのではありません．しかも，古典的ミラー対称性は，M のシンプレクティック幾何と M° の複素幾何の対応のほんのひとつの側面を述べているだけです．コンツェビッチは，ミラー対称性を圏論的な立場から捉え直し，より根源的な定式化を与えました．これはホモロジー的ミラー対称性と呼ばれており，現在，活発に研究が行われています．これに関しては，8章，10章に述べられています．

参考文献

［1］ 特集「トーリック多様体」，『数学セミナー』2004年3月号．

［2］ D. Cox and S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, 1999, AMS.

［こんの ひろし］

8 フレアーホモロジーとミラー対称性

深谷賢治
[京都大学大学院理学研究科]

1 はじめに

フレアーホモロジーは無限次元空間のホモロジー論です．無限次元空間として典型的に出てくるのは，ループ空間です．ループ空間 ΩM というのは，空間 M への円周 S^1 からの写像の全体のなす空間のことです．

普通のホモロジー論，たとえば特異ホモロジー論は，どんな位相空間に対しても定義されますから，ループ空間のホモロジーも考えることができます．ループ空間の普通のホモロジー群も重要で，昔から深く研究されてきました．たとえば，モース理論をモースが考えた動機は，閉測地線(S^1 からの写像で，「長さ」をループ空間上の関数とみなすと，そこで「長さ」が極値になっているもの)の研究からです．たとえば，ループ空間のホモロジー群の0でない元を使うと，閉測地線を作ることができます．

フレアーホモロジーは「ループ空間の普通のホモロジー群」とは異なります．違いを簡単に説明しましょう．空間 X のホモロジーの k 次の元とは，おおよそ，X に含まれる k 次元の図形(のしかるべき同値関係で考えた同値類)のことです．ループ空間の場合でも同じことで，ΩM の k 次のホモロジー群とは，ΩM に含まれる k 次の図形の同値類です．M が2次元球面 S^2 の場合は，それは次のようになります．

$$H_k(\Omega S^2\,;\,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \qquad \text{すべての負でない整数} k \text{に対して}$$

(ホモロジーを定義するには係数になる環をとる必要があります．ここでは答えが簡単になるように有理数全体 $\mathbb{Q}$ にしました．)

$H_0(\Omega S^2\,;\,\mathbb{Q})$ の元を与える1次元の図形は，1点からなるループです．つまり，たとえば北極を p_0 として，$l(t) = p_0$ というただ一つのループからなる集合を考えると，それが $H_0(\Omega S^2\,;\,\mathbb{Q})$ の生成元を与えます．

$H_1(\Omega S^2\,;\,\mathbb{Q})$ の生成元はもう少し面白くて，これはたとえば，p_0 を通り

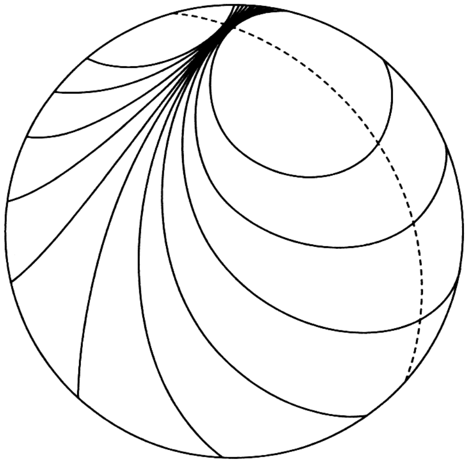


図 1

経度 0 度の子午線について対称な小円全体の図形で与えられます(図 1).

このことは閉測地線と関係があります. つまり, $H_0(\Omega S^2; \mathbb{Q})$ の元である 1 点からなるループは一番短い閉測地線です. また, $H_1(\Omega S^2; \mathbb{Q})$ の元である小円の族のなかには, 大円が含まれていて, 大円が 1 点の次に短い閉測地線です.

フレアーホモロジーもやはりループ空間のホモロジー群を定めますが, まったく違うホモロジー群です. たとえば, S^2 のループ空間のフレアーホモロジーは

$$HF_*(S^2; \mathbb{Q}) \cong H_*(S^2; \mathbb{Q})$$

で, つまり, 0 次と 2 次だけが $\mathbb{Q}$ で他は全部 0 になります. (ここで $HF(S^2)$ と書きました. M の「ループ空間のフレアーホモロジー」は $HF(M)$ と書くのが習慣です. F は創始者フレアー(Floer)の頭文字です.)

このようにフレアーホモロジーは普通のホモロジーとは大きく違うものになりますが, その理由は, フレアーホモロジーが

2 分の無限次元

のホモロジー論だからです. 記号で書くと,

$$HF_k(M) = H_{k+\frac{\infty}{2}}(\Omega(M))$$

なのです．つまり，「ループ空間のなかの2分の無限次元の図形を考えて，そのしかるべき同値類を考えたもの」がフレアーホモロジーです．

こう書くと「2分の無限次元の図形」というのが何かが，直ちに問題になります．現在ではまだ，「2分の無限次元の図形」を数学的にきちんと定義し，その同値類の集合としてフレアーホモロジーを定義することは，そのままではできません．にもかかわらず，フレアーはなんとか，2分の無限次のホモロジーを定義し，その応用，特に変分法への応用，を見つけました．フレアーホモロジーは種々のループ空間だけではなく，3次元多様体の接続の空間などでも定義され，それはゲージ理論の数学的研究などにも大きな役割を果たしています．

ミラー対称性におけるフレアーホモロジーの役割は，一言で言えば次の通りです．

> **ミラー対称性は，シンプレクティック幾何学と複素幾何学の間の対称性である．複素多様体における層係数コホモロジー論の，シンプレクティック幾何学における対応物が，フレアーホモロジーである．**

高次元の複素幾何学や代数幾何学の基礎付けが一応の完成をみたのが，1950年代―60年代で，そのとき用いられた中心的な道具が層とそのコホモロジー論でした．そう考えると，フレアーホモロジーのシンプレクティック幾何学での重要性をわかっていただけるのではないでしょうか．

上に書いた「スローガン」はホモロジー的ミラー対称性というミラー対称性の一つの形と密接に関わっています．それは，「ミラー対称性とホモロジー代数」の中で説明することにして，この章では，フレアーホモロジーとは何か，を説明することを主目的としたいと思います．

まず，2分の無限次元と関わりがありそうなことを，いくつか説明することにしましょう．

2 ディラックの海

初めは，ディラックの電子論です．フレアーホモロジーとディラックの電子論アナロジーというのは，ウィッテンの京都での国際数学者会議の講演(もう15年以上も前)からの受け売りです．ディラックは電子の相対性理論で不変な理論を作りました．その基本方程式であるディラック方程式

は，ラプラス方程式の $\frac{1}{2}$ 乗のようなもので，ラプラス方程式が2階の微分方程式であるのに対して，1階の微分方程式です．

大きな違いの一つは，ラプラス作用素の固有値がすべて非負であるのに対して，ディラック作用素の固有値には正のものも負のものも両方無限個あることです．これでは，ディラック作用素の固有関数は電子の状態で固有値がそのエネルギーである，という解釈に問題を起こします．つまり，負のエネルギー状態の存在です．ディラックはこれに対して，負のエネルギー状態はすでにいっぱい詰まっていて満員だから現れない，という解釈を提案しました．（空穴理論と呼ばれます．）無限種類あるすべての状態の中で，半分だけ(つまり負のもの全体)が全部詰まったのが真空である，という解釈です．

これを言い換えると，普通の状態は，$\frac{\infty}{2}$ 次の状態から有限個ずれた状態である，ということになります．これが $\frac{\infty}{2}$ 次が現れる一つの例です[1]．

3　佐藤グラスマニアン

佐藤幹夫はKP・KDV方程式に対して，それは，無限次元グラスマン多様体上の力学系である，という重要な発見をしました[2]．佐藤がそこで使った無限次元グラスマン多様体は，通常のものとは少し違っています．これを説明しましょう．グラスマン多様体とは，ある線形空間の中の，決まった次元の線形部分空間全体のことです．たとえば，$\mathbb{C}^n$ の中の k 次元複素線形部分空間全体を $Gr(m\,;k)$ などと書きます．このアナロジーでは佐藤グラスマニアンは $Gr\left(\infty, \frac{\infty}{2}\right)$ です．

もう少し正確に書きましょう．おのおのの整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して，ベクトル e_k をとり，無限個の基底 e_k, $(k=0,-1,1,-2,2,\cdots)$ をもつベクトル空間 V を考えます[3]．その部分空間として，非負の k に対する e_k だけを基底とするものを考え，これを $L_{\geq 0}$ と書きます．また，負の k だけを基底とするものを考え，これを $L_{<0}$ と書きます．どちらもいかにも2分の無限次元と思うことができます．

商空間 $V/L_{\geq 0}$ を考え，射影

$$V \longrightarrow V/L_{\geq 0}$$

を π と書きます．$L_{<0}$ への π の制限は同型写像

$$L_{<0} \cong V/L_{\geqq 0}$$

を定めます．佐藤グラスマニアンとは，$L_{<0}$ と「有限分だけ」ずれた部分空間の全体で，次のように定義されます．

V の線形部分空間 L に対して，π を L に制限したもの

$$\pi|_L : L \longrightarrow V/L_{\geqq 0}$$

を考えます．この核

$$\mathrm{Ker}(\pi|_L) = \{v \in L \mid \pi|_L(v) = 0\}$$

が有限次元で，また余核

$$\mathrm{CoKer}(\pi|_L) = \frac{V/L_{\geqq 0}}{\mathrm{Im}(\pi|_L)}$$

も有限次元，かつ

$$\dim \mathrm{Ker}(\pi|_L) - \mathrm{Coker}(\pi|_L) = 0$$

なるものの全体が佐藤グラスマニアンです．

たとえば，$k < -2$ に対するすべての e_k と，$e_{-1}+e_0, e_3$ を基底とするベクトル空間 L をとると，核 $\mathrm{Ker}(\pi|_L)$ は e_3 だけを基底とするので 1 次元で，余核 $\mathrm{CoKer}(\pi|_L)$ は $[e_2]$ (e_2 の同値類)だけが基底なので，やはり 1 次元です．

4　ハミルトン形式とラグランジュ形式

今まで 2, 3 節で述べたことは，前置きと思ってください．ここからが本題です．解析力学を習うと，変分法を 2 種類習います．1 つはハミルトン形式で，もう 1 つはラグランジュ形式です[4]．このうちラグランジュ形式の変分法は，1 節で述べたモースの考えにもとづき，ループ空間の普通のホモロジーに関わります．一方ハミルトン形式の変分法は，フレアーホモロジーに発展します．このことを説明しましょう．

簡単のため 1 変数で考え，ポテンシャル $V(q)$ が決める力をうけて働く

1)　ディラックの空穴理論は現在の場の量子論では捨てられている理論だそうですが，$\frac{\infty}{2}$ 次元という描像は残っていると思います．

2)　佐藤のソリトン理論については，たとえば，[4]参照．

3)　本当はしかるべき完備化が必要ですが，省略します．

4)　4 節，5 節について詳しくは，解析力学の本，たとえば[1]をみてください．

粒子を考えると，ラグランジュの汎関数は

$$\mathfrak{L}(q) = \int_{t=0}^{t=1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{q(t)}{dt}\right)^2 - V(q(t))\right)dt$$

です．ただし $q(t)$ は2点(たとえば $q=0$ と $q=1$)を結ぶ道全体の集合

$$\Omega(\mathbb{R}\,;0,1) = \{q:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,q(0)=0,\ q(1)=1\}$$

の元です．ラグランジュ形式での変分原理とは[5]，

「q で

$$\mathfrak{L}:\Omega(\mathbb{R}\,;0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$$

が極値をとることと，q がニュートンの運動方程式

$$\frac{dq}{dt} = -\mathrm{grad}_{q(t)}V \tag{1}$$

を満たすこととは同値である」

とまとめることができます．(q で f が極値をとる，というのを，q が f の臨界点である，と言います．)

1節で説明した測地線の場合と同様に考えると，$\mathfrak{L}$ の極値を探すことには，$\Omega(\mathbb{R}\,;0,1)$ の(普通の)ホモロジーが密接に関わります．

次にハミルトン形式を考えましょう．同じ1変数でも扱う道は相空間((q,p) が座標の2次元空間)の上の道になります．$(q(t),p(t))$ に対する汎関数は

$$\mathfrak{H}(q,p) = \int_{t=0}^{t=1}\left(p(t)\frac{q(t)}{dt} + V(q(t))\right)dt$$

になります．さらにこの汎関数を考える空間は

$$\Omega(\mathbb{R}^2\,;\{0\}\times\mathbb{R},\{1\}\times\mathbb{R}) = \{(q,p):[0,1]\to\mathbb{R}^2\,|\,q(0)=0,\ q(1)=1\}$$

になります．ハミルトン形式での変分原理は次のようになります．

「$(q,p)\in\Omega(\mathbb{R}^2\,;\{0\}\times\mathbb{R},\{1\}\times\mathbb{R})$ が $\mathfrak{H}$ の臨界点であることと，$P(t) = \dfrac{dq}{dt}(t)$ かつ $q(t)$ が微分方程式(1)を満たすことは同値である．」

さて，それでは，$\mathfrak{H}$ に対する変分問題が $\Omega(\mathbb{R}^2\,;\{0\}\times\mathbb{R},\{1\}\times\mathbb{R})$ の「普通のホモロジー」に関わるかというと，そうではないのです．すなわち，ハミルトン形式の変分問題は相空間(のループ空間)のフレアーホモロジーに関わります．これが，フレアーホモロジー登場の大きな動機で，シンプレクティック幾何学におけるフレアーホモロジーの重要性の大きな理由で

す．そこに向かって話を進めましょう．

5　モース理論再説

4節では1次元ユークリッド空間で説明しました．それではフレアーホモロジーの説明には不向きなので，2次元球面 S^2 上の運動方程式を考えましょう[6]．このときラグランジュ形式では，$\Omega S^2 = \{q : S^1 \to S^2\}$ 上の汎関数

$$\mathfrak{L}(q) = \frac{1}{2}\int \sum_{ij} g_{ij} \frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} dt$$

を考えることになります．(g_{ij} はリーマン計量．）これを道のエネルギーと言います．この汎関数の臨界点もやはり測地線になることが知られています．

球面の測地線というのは大円です．さらに正確に言うと，球面の測地線全体の集合を $\mathrm{Crit}(\mathfrak{L})$ と書くとき，それは和集合

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Crit}_k(\mathfrak{L}) \tag{2}$$

になります．ここで，$\mathrm{Crit}_k(\mathfrak{L})$ はどれも S^2 と同相で次のような閉測地線からなります．

（1）　$\mathrm{Crit}_0(\mathfrak{L})$ は1点からなる測地線全体．

（2）　$\mathrm{Crit}_1(\mathfrak{L})$ は大円全体で，これは，（向きも考えると）S^2 全体と一対一に対応する[7]．

（3）　$k \geqq 2$ に対しては，(2)の大円をちょうど k 回まわる測地線を考えます．つまり，$l \in \mathrm{Crit}_1(\mathfrak{L})$ に対して，$l^k(t) = l(t^k)$ とします．（ここで $S^1 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ とみなします．）その全体が $\mathrm{Crit}_k(\mathfrak{L})$ です．

分解(2)に対応して

5）紛らわしいのですが，これをハミルトンの変分原理と呼ぶようです．

6）さらに境界条件はやめてかわりに定義域を区間 $[0,1]$ から円周 S^1 に変更します．

7）大円 l に対して，そこからもっとも遠い球面上の点を考えるとちょうど2点 p, q があります．p からみて，大円の向きが反時計回りになるという条件をおくと，点 p がただ1つ決まります．これが対応 $\mathrm{Crit}_1(\mathfrak{L}) \cong S^2$ です．

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} H(\mathrm{Crit}_k(\mathfrak{L})) \tag{3}$$

なる直和から，$H(\Omega(S^2))$ が得られます．つまり，ループ空間のホモロジーは測地線の集合のホモロジーの直和から得られます．

ただし，2つの修正が必要です．

まず，ホモロジーの次数を考えると，(3)には修正が必要で，d 次部分が

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} H_{d-k}(\mathrm{Crit}_k(\mathfrak{L})) \tag{4}$$

になります．(4)で次数に現れた $d-k$ の k はモース指数と言われる数で，これは，測地線の長さが減っていく方向の数，を表します．

たとえば，$\mathrm{Crit}_0(\mathfrak{L})$ の元は長さ 0 なので，これ以上減らずモース指数は 0 です．一方，$\mathrm{Crit}_1(\mathfrak{L})$ の元では，図 1 の小円の族を考えると，そちらの方向には長さが減るので，長さが減る方向が 1 つあり，モース指数は 1 です．

次に，測地線のホモロジーの直和の間には，実はキャンセルがおこり，ループ空間のホモロジーは測地線のホモロジーの直和より小さくなります．(8 節でもう少し説明します．)

今説明する S^2 のループ空間の場合には，おのおのの k に対して，

$$H_0(\mathrm{Crit}_{2k}(\mathfrak{L})) \cong \mathrm{H}_2(S^2) \cong \mathbb{Q}$$

と

$$H_2(\mathrm{Crit}_{2k-1}(\mathfrak{L})) \cong \mathrm{H}_0(S^2) \cong \mathbb{Q}$$

の間にキャンセルがおこることが知られています[8)]．

6　フレアーホモロジー

次にハミルトン形式を考えましょう．5 節の話に直接対応する相空間は，S^2 の余接束なのですが，ここではもう少し易しくして，2 次元トーラス T^2 が相空間である場合を考えます．T^2 とは実数の組 q, p 全体に「$(q, p) \sim (q', p')$ となるのは，$p-p', q-q'$ が整数となるとき」，という同値関係を考えた同値類全体です．そこへの閉じた道 $([q(t)], [p(t)])$ (閉曲線)を考えます．

まず，道が 1 点につぶれる(0 ホモトピック)未知の $([q(t)], [p(t)])$ を考えます．すると，$([q(t)], [p(t)])$ は

$$(q(t), p(t)) : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

なる平面上の道に $([q(t)], [p(t)])$ が持ち上がることがわかります．ハミルトンの汎関数は

$$\mathfrak{H}(q, p) = \int_{t=0}^{t=1} p(t) \frac{dq(t)}{dt} dt \tag{5}$$

です．(5)には次のような幾何学的意味があります．「道 $(q(t), p(t))$ が囲む図形を C とすると，$\mathfrak{H}$ は C の面積になる．」ただし，C を $(q(t), p(t))$ が反時計回りに回るときはプラスの，時計回りに回るときはマイナスの符号をつけます．

言い換えると

$$\mathfrak{H}(q, p) = \int_C dp \wedge dq$$

になります．$dp \wedge dq$ がシンプレクティック形式と呼ばれています．

さて，今度の $\mathfrak{H}$ の極値はもっと簡単です．つまり，$\mathfrak{H}(q, p)$ が極値になるような，(q, p) は一点からなる道だけです．$\mathbb{R}^2$ の1点からなる道全体は $\mathbb{R}^2$ ですが，いまは T^2 の道と考えているので，結局

$$\mathrm{Crit}(\mathfrak{H}) = T^2 \tag{6}$$

となります．

1点につぶれない道も含めてを考えると，(5)のような式で汎関数を定義することはできませんが，$\mathfrak{H}$ の1回微分は考えることができます．ですから，汎関数の臨界点になる道，という概念は定義できます．しかし，実は，そう考えても，1点につぶれない道の場合には，汎関数 $\mathfrak{H}$ の微分は0になることはありません．つまり，(6)は道全体 ΩT^2 で考えても成り立ちます．

以上の事実にもとづき，5節のアナロジーで

$$HF(T^2) = H(T^2)$$

と定義します．つまり，T^2（あるいは ΩT^2）のフレアーホモロジーは T^2 の普通のホモロジーと同じです．

これは実は不思議な事実です．なぜなら，T^2 のループ空間のホモロジー $H(\Omega T^2)$ は T^2 のホモロジーとは異なるからです．

そのことを説明するために T^2 の測地線を調べてみましょう．T^2 の測地線は $(x, y) \in T^2$ と $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ に対して，

8）　理由は易しくないので説明しません．

$$e^{2\pi\sqrt{-1}t} \mapsto (x+at, y+bt)$$

で与えられます．（つまり，直線です．） したがって，測地線全体は T^2 を無限個（おのおのの $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ に対して 1 つずつ）考えたもので，

$$\bigoplus_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} H(T^2)$$

です．（T^2 の場合はすべての測地線は長さ極小なので，モース指数は 0 です．） このことから，

$$H(\Omega T^2) \cong \bigoplus_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} H(T^2)$$

になり，ループ空間のホモロジーとフレアーホモロジーが違うことがわかります．

7 フレアーホモロジーと変分問題

ループ空間のホモロジーとフレアーホモロジーが違う理由を，もっとはっきり知るには，$\mathfrak{H}$ の変分問題をもう少しよくみてみる必要があります．汎関数(5)を調べてみましょう．そのために $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ とみなし，$p(t)+\sqrt{-1}q(t)$ をフーリエ展開します．つまり，

$$p(t)+\sqrt{-1}q(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i \tag{7}$$

（$t \in \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ でした）とおきます．このとき

$$\mathfrak{H}(p,q) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i \cdot a_i^2 \tag{8}$$

が計算で確かめられます．

式(8)を眺めると，汎関数 $\mathfrak{H}$ の様子がわかってきます．つまり，$\mathfrak{H}$ は q の 2 次関数で，固有値が正の方向が無限個（$i > 0$ に対応する），固有値が負の方向が無限個（$i < 0$ に対応する）あり，さらに，固有値 0 の方向が 2 つ（$i = 0$ に対応する）あります．つまり，汎関数が減る方向が無限個あり，したがって，モース指数は無限大です．さらに言うと，全体の半分だけが負の固有値なので，2 分の無限大というべきでしょう．

5 節で述べたように，ホモロジーを求めるには，モース指数だけ，次数をずらす必要があります．すなわち，

$$HF_d(T^2) = H_{d+\frac{\infty}{2}}(\Omega T^2)$$

と書くことができます．（もちろんこの式は厳密な数学としての意味をもちません．）

ミラー対称性の話に戻る前に，フレアーホモロジーのシンプレクティック幾何学での応用に触れておきます．(4)の汎関数をハミルトン関数 $H(t\,;q,p)$ を入れて少し変形し

$$\mathfrak{H}_H(q,p)=\int_{t=0}^{t=1}\left(p(t)\frac{q(t)}{dt}+H(t\,;q(t),p(t))\right)dt \tag{9}$$

なる汎関数を考えます．（H は $S^1\times T^2$ 上の関数，つまり t についても周期的な関数とします．）　すると，$\mathfrak{H}_H$ の臨界点である (q,p) はハミルトンの正準方程式

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q} \tag{10}$$

の周期解になることがわかります．(10)の周期解の空間からやはり，フレアーホモロジー $HF(T^2)$ が定まり，実はそれは H を 0 にした場合と同じホモロジー群であることがわかります．

以上の考察はどんなコンパクトなシンプレクティック多様体に対しても成立し，それを用いると，たとえば，

任意のコンパクトな相空間上の周期的なハミルトニアン H に対して，正準方程式(10)には周期解が存在する

という定理が得られます．このような応用がフレアーがフレアーホモロジーを考えた動機でした．

もう1つ，2節との関係に触れておきましょう．S^1 上のディラック作用素（というのは大げさですが）は $\sqrt{-1}d/ds\,(t=s^{2\pi\sqrt{-1}s})$ になります．この場合の，固有関数分解が，(7)のフーリエ級数で，i は固有関数 t^i の固有値です．つまり，(8)のように書いたときの，2次形式の固有値は，ディラック作用素の固有値です．2節の「電子の海」を構成する無限個の負のエネルギーに対応する自由度が，モース指数に対応し，それは2分の無限大です．

3節の佐藤グラスマニアンとの関係は，フレアーホモロジーやミラー対称性の可積分系やD加群との関係の中に現れます．それはこの章では触れることができません．

8　フレアーホモロジーとグロモフ－ウィッテン不変量

フレアーホモロジーとグロモフ-ウィッテン不変量には密接な関係があります．その説明には，5節でふれたキャンセルについてもう少し述べる必要があります．下の図2をみてください．

図2は球面を少しゆがめてこぶが2つあるようにして，それを3次元空間においた図です．M を図2の曲面とします．f を M 上の関数を点に対してその点の高さを表す関数とします．すると，f には4つの臨界点 p_1, p_2, q, r があります．p_1, p_2 のモース指数は2，q のモース指数は1，r のモース指数は0です．これから，(3)にあたるものを(Ω のかわりに f を，$\Omega(S^2)$ のかわりに M をとって)作ると，できたものは，

$$C_i = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i = 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

になります．C_i は M の i 次のホモロジー(つまり球面の i 次のホモロジー) $H_i(M)$ より大きく，$H_i(M)$ は

$$H_i(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

です．C_i からキャンセルによって $H_i(M)$ がでてくる仕組みを説明します．

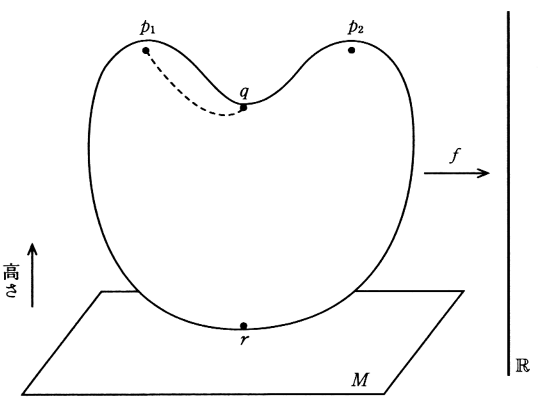


図2

f の勾配ベクトル場 grad f を考えます．（$\mathrm{grad}_p f$ は p で f が一番増える方向に向いたベクトルです．）p_1 から出発して $-\mathrm{grad}\, f$ の方向に点を動かしていきます．すると，図2の点線のように，ちょうど1本，p_1 から出発して，q で終わる線があります．これを $-\mathrm{grad}\, f$ の積分曲線，と言います．p_1 から出発して q で終わる，$-\mathrm{grad}\, f$ の積分曲線の数が1であるとき：

$$\langle \partial[p_1], [q] \rangle = 1$$

と定義します．この ∂ は境界作用素と呼ばれます．境界作用素は $\partial \circ \partial = 0$ をみたし $\bigoplus_i C_i$ の上に鎖複体の構造を定め，そのホモロジー群が $H(M)$ になります．

すなわち，勾配ベクトル場の積分曲線の数を，臨界点がキャンセルしてホモロジー群を与える様子を決めます．

有限次元の場合から，6節や7節で述べた，フレアーホモロジーの場合に話を移します．次の事実(*)がフレアーのフレアーホモロジーの発見の鍵になった事実です．

(*)　汎関数 $\mathfrak{H}$ の勾配ベクトル場の積分曲線とは $S^1 \times \mathbb{R} \to M$ なる正則写像である．

(*)を説明します．$\mathfrak{H}$ は4節の(5)のような汎関数です．その積分曲線は $\mathbb{R} \to \Omega M$ なる写像ですが，それは $\mathbb{R} \times S^1 \to M$ なる写像と見なすことができます．$\mathbb{R} \times S^1$ は複素平面から原点をのぞいたものと同一視されるので，$\mathbb{R} \times S^1 \to M$ という写像が正則写像である，（つまり複素解析的である）ということが定義できます．(*)は，$\mathbb{R} \times S^1 \to M$ が $\mathfrak{H}$ 積分曲線であることと，対応する $\mathbb{R} \times S^1 \to M$ が正則写像であることが，同値であることを述べています[9)]．

さて，この節の前半で述べたことを思い出しましょう．そこで述べたのは，「臨界点」から「ホモロジー」を導くには，「臨界点のキャンセル」を考える必要がある，ということでした．キャンセルの様子は，汎関数の勾

9）ループ空間の点を弦とみなすと，弦の時間発展つまりループ空間上の道が，曲面からの写像と見なすことができる，というのは，弦理論の基本的な考え方です．また，曲面からの写像が正則写像であるという方程式(つまりコーシー--リーマン方程式)は，弦理論の運動方程式と見なすことができます．

配ベクトル場の積分曲線の数で決まりました．そして，(*)によれば，$\mathfrak{H}$ の場合，勾配ベクトル場の積分曲線というのは，$\mathbb{R}\times S^1\to M$ という正則写像のことでした．

これでフレアーホモロジーとグロモフ-ウィッテン不変量の間に関係がつきました．つまり，「ハミルトン力学系の周期点」から「フレアーホモロジー」を導くには「正則写像の数」を用いたキャンセルを考える必要がある．ということです．正則写像の数というのは，まさしく，グロモフ-ウィッテン不変量のことでした．

上の説明では1つごまかしをしていて，実は，フレアーホモロジーを群として(あるいはベクトル空間として)考えている限り，「キャンセル」はおこりません[10)]．つまり，

$$HF(M) = H(M) \tag{11}$$

です．正則写像の効果は，積を考えると現れてきます．たとえば，量子コホモロジーは，$H(M)$ 上の積構造[11)] を定めますが，それはむしろ，(11)を通して $HF(M)$ 上のコホモロジーであると考えると，自然になるのです．

参考文献

［1］ 深谷賢治,『解析力学と微分形式』, 岩波書店, 2004年.

［2］ http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/
においてある，1997年の静岡大学の講義録(横山美佐子さんによる).

［3］ 深谷賢治,『シンプレクティック幾何学』(岩波講座・現代数学の展開), 岩波書店, 1999年.

［4］ 佐藤幹夫(著), 野海正俊(記),『ソリトン方程式とグラスマン多様体』, 上智大学数学講究録18, 1984年.

［ふかや けんじ］

10） ループ空間，つまり閉弦(closed string)の場合．開弦(open string)ではおこります．

11） 通常のコホモロジーのカップ積を「量子変形」したもの．

9 ミラー対称性とD-加群

マーティン・ゲスト [首都大学東京大学院理工学研究科]
乙藤隆史 [日本大学工学部]

1 はじめに

これまでの章で解説されたように，ミラー対称性は数学および物理のさまざまな面に関連しています．今回は，ミラー対称性の重要な数学的特徴の一部分が**常微分方程式**から取り出せる，ということを説明したいと思います．

常微分方程式は数学や物理においてなじみ深いものです．たとえば，指数関数的増大を表す方程式 $y' = ky$ (解は $y = Ae^{kx}$) や，単振動の方程式 $y'' = -ky$ (解は $y = A\sin\sqrt{k}x + B\cos\sqrt{k}x$) はいたるところでお目にかかります．微分方程式がミラー対称性という，非常に面白いが難しくもある話題に入っていく際の手がかりになる，これは思いがけず嬉しいことです．

もちろん，ミラー対称性に現れる微分方程式は特殊なタイプであって，研究者たちが発見するのは容易ではありませんでした．また，これらの微分方程式は，(微分幾何的には)平坦接続として，また(代数的には)D-加群という高度な道具をもちいて考察するのが便利です．これらの点を技術的な詳細に立ち入らずに簡単に説明してみましょう．

「ミラー対称性とD-加群」という題目の根底にある考えは，ミラー対称性の微分方程式に次のまったく異なる二つの対象の仲立ちをさせよう，というものです．その二つの対象とは，グロモフ-ウィッテン不変量やシンプレクティック・トポロジーと関係する量子コホモロジー，そしてもう一つが複素代数幾何学におけるホッジ構造の変動です．これまでも，この種の思いがけない関連は数学において常に非常に豊かな実りをもたらしてきました．ミラー対称性の場合も例外ではありません．

2 微分方程式

この章では2階の線形常微分方程式のみを考察することにします．2階の線形常微分方程式とは

$$y''+a_1(z)y'+a_0(z)y=0$$

のことです．ここで，$y=y(z)$ は複素変数 z の複素数値関数，a_0, a_1 は与えられた複素数値関数とします．（実数変数の実数値関数の方が分りやすければ，そのように仮定して読み進めてもよいですが，より深く理解するためには複素数が不可欠です．）

係数 a_0, a_1 が定数ならば一般解は簡単に表されます．たとえば，もし多項式 $t^2+a_1t+a_0$ が相異なる根 α, β を持つなら，一般解は $y=Ae^{\alpha z}+Be^{\beta z}$ となります．

係数 a_0, a_1 が定数でないなら，一般解を表す簡単な表示式はありませんが，ある点 z_0 で a_0, a_1 が定義されていれば，z_0 の近傍で解は存在します．そして，そのような解の全体は2次元のベクトル空間を成します．解は通常，テイラー級数の形で与えることができて，必要ならばその数値を計算することももちろん可能です．

a_0, a_1 の一方が z_0 で特異点を持つ場合，一般には z_0 において定義された解は見つかりませんが，z_0 の“近く”で定義された解は存在し，特異点に近づくとどうなるか調べることができます．

例として，超幾何微分方程式

$$y''+\frac{(a+b+1)z-c}{z(z-1)}y'+\frac{ab}{z(z-1)}y=0 \qquad (*)$$

（ただし a, b, c は定数）を考えると，この方程式は $z=0, 1$ と $z=\infty$ において特異点を持ちます（$z=\infty$ が特異点であることは新しい変数 $w=\dfrac{1}{z}$ で方程式を書き換えるとわかります）．この例は特別な性質がたくさんあることで有名です．たとえば，c が負の整数でも零でもない場合，$z=0$ は方程式の特異点であるにもかかわらず，その開近傍で正則な特殊解

$$y=1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

が存在します．さらに，三つの特異点はいずれも“確定”特異点であって，

その振る舞いが超幾何微分方程式のすべての性質を規定します．もちろん，解のさまざまな振る舞いを実際に記述するのはきわめて複雑であり，確定特異点がもっとあったり，不確定特異点がある場合は，ますます複雑になります．

3 D-加群

2階のスカラー方程式 $y''+a_1y'+a_0y=0$ は1階の行列方程式

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

に変換できます．こうすると都合のよいことがあります．変換の仕方はほかにもあり，たとえば

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{z} \\ -za_0 & \dfrac{1}{z}-a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ zy' \end{pmatrix}$$

とすることもできます．

逆に y_0, y_1 に対する1階の行列方程式は，さまざまな方法で y に対する2階のスカラー方程式に変換されます．上の例では，$y=y_0$ とおきましたが，ほかの選択(たとえば，$y=y_1$ とおく，または y_0, y_1 を含む式を y とおく)もあります．スカラー方程式から行列方程式への変換(およびその逆)におけるこの自由度は重要です．この自由度のおかげで，与えられた問題に適した最も簡単な形を探すことができるのです．

今われわれが扱っている対象を D-加群の言葉で述べると，

$$\mathscr{M} = \frac{D_z}{(T)} = \frac{\text{すべての微分作用素}}{T\text{ で生成される左イデアル}}$$

という D-加群になります．ここで T は，微分作用素 $\partial_z^2+a_1\partial_z+a_0$ であり，∂_z は $\dfrac{\partial}{\partial z}$ を略記したものです．微分方程式 $Ty=0$ の代わりに $\dfrac{D_z}{(T)}$ という加群を考えるのです．これは，代数幾何において，方程式 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ を考える代わりに環

$$A = \frac{\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]}{(f(x_1,\cdots,x_n))}$$

を考えることと似ています．これを抽象的な環としてとらえることで，座標変換を定義の中に取り込んでしまうわけです(現代数学においてよく行われる考え方です)．

ちなみに，もとの方程式 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ をみたす点は，環 A から $\mathbb{C}$ への環準同型写像に対応します．D-加群の場合，微分方程式 $Ty = 0$ の解は，$\mathcal{M}$ から考えている関数空間への D_z-準同型写像に対応します(詳しくは，文献[5]を参照してください)．

さて，$\mathcal{M}$ の(z の関数のなす環上の)基底をなす微分作用素 P_0, P_1 を選ぶと，もとのスカラー方程式 $Ty = 0$ と同値な行列微分方程式が定まります．上の最初の例は基底として $1, \partial_z$ を，二番目の例は $1, z\partial_z$ を選んだ場合に相当します．方程式に現れる行列は，"∂_z の $\mathcal{M}$ への作用を基底 P_0, P_1 に関して表した行列" にほかなりません．ですから，簡単な行列を探すという問題は，D-加群の適切な基底を求める問題と言い換えることができます．これは線形代数で扱う，行列の標準形を求める問題によく似た問題です．実際，ジョルダン標準形の最初期の応用の一つにこの手の微分方程式の問題がありました([2]，2.4 節を参照してください)．常微分方程式を D-加群としてみる見方については，文献[4][5]が参考になります．

例として，微分作用素を

$$\partial_z^{n+1} + a_n\partial_z^n + \cdots + a_1\partial_z + a_0 = (\partial_z + b_n)(\partial_z + b_{n-1})\cdots(\partial_z + b_0)$$

と分解する問題を考えましょう(この例は後で用います)．多項式の因数分解に似ていますが，微分作用素環という非可換な世界においては事情は複雑です．微分方程式の解を用いると次のように分解できます．まず，初期条件 $u_i^{(j)}(z_0) = \delta_{ij}$ をみたす解 $u_0, \cdots, u_n$ を選びます．これは一意的に定まります．

$$F = \begin{pmatrix} u_0 & u_0' & \cdots & u_0^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_n' & \cdots & u_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

を基本解行列とします．定義より F は

$$F^{-1}F' = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-1} \\ & & 1 & -a_n \end{pmatrix}$$

をみたします．

ここで，ガウス分解 $F = F_- F_+$ (F_- は下三角行列(対角成分は1)，F_+ は上三角行列)を施します．すると，

$$F_-^{-1}F_-' = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ v_1 & 0 & & & \\ & v_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & v_n & 0 \end{pmatrix}$$

となることがわかります．ここで，関数 $v_0, \cdots, v_n$ は条件 $v_0(z_0) = \cdots = v_n(z_0) = 1$ と

$$u_0 = v_0, \qquad u_1 = v_0 \int v_1, \qquad u_2 = v_0 \int \left(v_1 \int v_2 \right), \qquad \cdots$$

によって $u_0, \cdots, u_n$ から一意に定まる関数です．

変換 $F \mapsto F_-$ はD-加群の基底変換に対応しています．そして(上の行列より)変換後の作用素は

$$v_0 v_1 \cdots v_n \partial_z \frac{1}{v_n} \cdots \partial_z \frac{1}{v_1} \partial_z \frac{1}{v_0}$$

です(常微分方程式の理論において，フロベニウスの記号的分解とよばれる方法です)．$\partial_z \frac{1}{v} = \frac{1}{v}\partial_z + \left(\frac{1}{v}\right)'$ なので，これでもとの微分方程式が一次因子の積に分解されたことになります．この分解を具体的に実行するには微分方程式を先に解いておくことが必要ですが，後でみるように，このような分解ができるという事実が役に立つのです．D-加群の言葉では，この分解は部分D-加群の列 $\mathcal{M}_1 \subseteqq \mathcal{M}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{M}$ に対応します．

4　2次元トーラスを用いた例

ミラー対称性という現象を2次元トーラス T^2 という非常に簡単な例で説明しましょう．実を言うと，この例は簡単すぎて，ミラー対称性の最も興味深い側面の多くが現れてきません．しかし，微分方程式の果たす役割を説明するという目的のためには，ややこしい点の少ない，よい例になっています．

2次元トーラスは二つの円周の積 $S^1 \times S^1$ です．これは3次元ユークリ



異なる2つの格子

ッド空間に埋め込むことができて，ふつうは“穴が一つある”曲面として描かれます．しかし，これから述べるようにトーラスをみる方法はほかにもあり，（非常に荒っぽく言えば）それらの方法はミラー対称性の両サイドを表しているのです．

まず，$T^2=\mathbb{C}/\Lambda$，すなわち複素数平面を格子部分群で割った商空間，とみなす方法です．$\Lambda=\mathbb{Z}\oplus\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ は格子部分群の一つの例であり，このときトーラスは $T^2=S^1\times S^1$ となります．しかしこれだけではありません．格子は任意の $\mathbb{R}$ 上一次独立な $\mathbb{C}$ 内の二つのベクトルで決まるので，選び方によっていろいろなトーラスができます．その一つ一つは複素リー群です．

次に，T^2 を複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ 内の（特異点のない）部分多様体として表す方法です．やはり，いろいろな表し方があります．たとえば，$z_2^2=z_1^3+az_1+b$ の形の方程式はいずれも $\mathbb{C}^2$ 内の複素曲線を定め，$4a^3+27b^2\neq 0$ ならば，これに無限遠点を付け加えることによって $\mathbb{C}P^2$ 内のトーラスを定めます．別の言い方をするなら，射影座標を用いて3次の同次多項式によって定義される複素曲線です．このようにして，$\mathbb{C}P^2$ 内の“楕円曲線”すなわち“3次超曲面”の族が得られます．トーラスを単独ではなく，族として扱うことが後で重要になります．

さて，この場合に用いるべき微分作用素は実は

$$\delta^2-3z(3\delta+2)(3\delta+1)$$

であることがわかります．ここで δ は $z\dfrac{\partial}{\partial z}$ を表します．整理すると，$((1-27z)\delta^2-27z\delta-6z)y=0$ という微分方程式が得られます．特異点は $0, \dfrac{1}{27}, \infty$ の3点です．フロベニウスの方法で $z=0$ の周りの解の級数展開を見出すことができて，次の形の一次独立解が得られます：

$$u_0=f_0,$$
$$u_1=f_0\log z+f_1$$

ここで f_0, f_1 は $z=0$ において正則であって，$f_0(0)=1$，$f_1(0)=0$ をみたします．級数展開の最初の方は

$$f_0(z) = 1+6z+90z^2+\cdots$$

$$f_1(z) = 15z+\frac{513}{2}z^2+\cdots$$

のようになっています．

この常微分方程式は超幾何微分方程式の一例であり，z を $\frac{z}{27}$ に置き換えると，第2節で挙げた式(*)において $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=1$ とおいたものになります．超幾何微分方程式の族のなかでも，この解の“姿”は特殊です．後で見るように，これは氷山の一角にすぎません．

微分作用素 $\delta^2-3z(3\delta+2)(3\delta+1)$ の由来については詳しく説明しませんが，背後には一貫した理論(GKZ 方程式とトーリック多様体の理論)が控えている，とだけ述べておきます．たとえば，$\mathbb{C}P^{N-1}$ 内の次数 k の非特異超曲面に対する微分作用素は

$$\delta^{N-1}-kz(k\delta+k-1)\cdots(k\delta+1)$$

となります．$k=N=5$ の場合がミラー対称性を数学に導き入れることになった有名な4次元射影空間内の5次超曲面に対する微分作用素です．

5　グロモフ-ウィッテン不変量(量子コホモロジー)を取り出す

量子コホモロジーにおけるD-加群のはたす役割は，ギベンタリ[1]によって示唆されました．簡単に述べると，“量子D-加群” なるD-加群は量子コホモロジー環よりも基本的な対象である，というのがギベンタリの見解です．

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の量子コホモロジー環は

$$QH^*\mathbb{C}P^n = \frac{\mathbb{C}[x,q]}{(x^{n+1}-q)}$$

と表示されます．また，複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の量子D-加群は

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}P^n} = \frac{D_t}{(\partial_t^{n+1}-q)}$$

となります．ただし $q=e^t$ とおきます．また，D_t は $\partial_t = q\partial_q$ で生成される微分作用素のなす環です．(前に使った変数 z の代わりに t を用いてい

ます．通常，量子コホモロジーにおいてはこちらが用いられます．）

$\mathbb{C}P^n$ 以外の空間については，（可換な）量子コホモロジー環と（非可換な）量子 D-加群との間の関係は，たいていの場合，もっと複雑です．けれども，T^2 の場合は簡単なものになっています．それは，正則写像 $\mathbb{C}P^1 \to T^2$ はいつも定数写像なので，量子コホモロジー環が通常のコホモロジー環と本質的に変わらないからです．コホモロジー環，量子コホモロジー環の偶数次数のなす部分環をそれぞれ $H^\#, QH^\#$ という記号で表すことにすると，

$$QH^\# T^2 = H^\# T^2 \otimes \mathbb{C}[q] = \frac{\mathbb{C}[x,q]}{(x^2)}$$

そして

$$\mathcal{M}_{T^2} = \frac{D_t}{(\partial_t^2)}$$

となります．

D-加群

$$\mathcal{M} = \frac{D_\theta}{\left(\partial_\theta^2 - \frac{27z}{1-27z}\partial_\theta - \frac{6z}{1-27z}\right)}$$

から，この T^2 の量子 D-加群を構成する手続きを述べてみます（なぜこれでうまくいくかは，説明を略します）．ここで $z = e^\theta$ とおいています．よって，$z\partial_z = \partial_\theta$ が成り立ちます．変数 q, t は z, θ の類似物です．実際，あとで見るように，T^2 の量子コホモロジーを取り出す際の主要なステップは z から q への（いささかわかりにくい）座標変換なのです．

前に述べたように，われわれの常微分方程式は因数分解した形：

$$(1-27z)v_0 v_1 \partial_\theta \frac{1}{v_1} \partial_\theta \frac{1}{v_0}$$

で書くことができます．ここで $v_0 = u_0$，$v_1 = \partial_\theta \dfrac{u_1}{u_0}$ です．この形から，いまの問題に適切な座標変換が何であるか見て取ることができます：$\dfrac{1}{v_1}\partial_\theta = \partial_t$ とおくのです．別の言い方をするなら，新しい変数 t を

$$t = \int v_1(z)d\theta = \frac{u_1(z)}{u_0(z)} = \log z + \frac{f_1(z)}{f_0(z)} = \log z + 15z + \frac{333}{2}z^2 + \cdots$$

で，すなわち

$$q = ze^{f_1(z)/f_0(z)} = z + 15z^2 + 279z^3 + \cdots$$

で定義します．こうしておくと，われわれの微分作用素が

$$\partial_t^2$$

(に関数を掛けたもの)となることがわかります．これから，求める量子 D-加群 $\mathscr{M}_{T^2}$ が出てきます．

ここまでグロモフ-ウィッテン不変量については何も説明していませんでした．グロモフ-ウィッテン不変量とは，量子コホモロジー環の構造定数となる量のことです．T^2 の場合，これは量子積

$$x \circ x = a1 + bx$$

における係数 a, b に相当します．T^2 の場合はこれ以上何も計算せずに，関係式 $x^2 = 0$ から直ちに $a = b = 0$ が出てきます．

構造定数に関するこの結果が D-加群 $\mathscr{M}$ からどのように導かれるかを見ることにしましょう(T^2 の場合は上で見た通り量子コホモロジーの表示式だけで結果が得られるので，わざわざ D-加群を持ち出さずともよいわけですが，手法自体はより一般の空間に対して適用可能で，時に非自明な結果が出てきます)．もとのスカラー微分方程式を，基底 $1, \partial_\theta$ を用いて行列微分方程式に変換すると

$$\partial_\theta \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{6z}{1-27z} & \dfrac{27z}{1-27z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

が得られます．別の基底 $\dfrac{1}{v_0}, \dfrac{1}{v_1}\partial_\theta\dfrac{1}{v_0}$ を用いると，次の形

$$\partial_\theta \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

が得られます．最後に，座標変換で関数 v_1 を定数関数 1 に変換します．構造定数はこうして得られた行列の係数にほかなりません．すなわち $x \circ 1 = x$ と $x \circ x = 0$ が導き出されました．

4 次元射影空間内の 5 次超曲面の場合，同様の手続きで

$$\partial_t^2 f \, \partial_t^2$$

(f はある関数)の形の微分作用素が得られます．関数 f は可換の世界に移ると取り除くことができるので，量子コホモロジー環は通常のコホモロジー環と同じ関係式 x^4 を持つことがわかります．しかし今の場合，グロモフ-ウィッテン不変量は消えていません．なぜなら，関数 f が構造定数のなす 4×4 行列の中で生き残っているからです．

6　ホッジ構造を取り出す

微分作用素 $\delta^2-3z(3\delta+2)(3\delta+1)$ の因数分解は，ミラー対称性のもう一つのサイドにおいても重要です．3節で注意しましたが，この因数分解は部分 D-加群 $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}$ に対応します．これは

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0' \\ u_1' \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{C}^2$$

なる $\mathbb{C}^2$ 内の複素直線の族を与えること，と解釈できます．（この節では u' は $\partial_\theta u = z\partial_z u = \delta u$ を意味するものとします．） これは $\mathbb{C}P^1$ への正則写像です．4次元射影空間内の5次超曲面の場合には，成分 u_0, u_1, u_2, u_3 をもつ列ベクトル u を考え，“旗(flag)”

$$\begin{aligned}\mathrm{Span}\{u\} &\subseteq \mathrm{Span}\{u, u'\} \\ &\subseteq \mathrm{Span}\{u, u', u''\} \\ &\subseteq \mathrm{Span}\{u, u', u'', u'''\} = \mathbb{C}^4\end{aligned}$$

を得ることになります．実は，これには別の幾何学的な意味があります：“ホッジ構造の変動(VHS)の周期写像” になっているのです．われわれの微分方程式に対する量子コホモロジーとしての解釈は，比較的最近(1990年代)の物理学での発見ですが，VHS としての解釈はもっと以前からあり，複素多様体の幾何学(1970年代)から出てきたものです．

基本的な考え方は，先に登場した，族をなすトーラスに対し，それらのコホモロジー群を考察することによって見て取ることができます．まず，コホモロジー群 $H^1(T^2, \mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ であることはよく知られています(可縮でないループ，すなわち1-サイクルが2種類取れる，ということ)．よって，ベクトル空間 $H^1(T^2, \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^2$ です(ド・ラームコホモロジーの言葉では，一次独立な二つの1-形式，dx と dy が取れる，ということ)．これはどのトーラスで考えるかにはよりません．つまり，トーラスは位相的にはどれも互いに同値であって，同じコホモロジーを持つのです．しかし，複素多様体に対しては (p,q)-コホモロジーというものも考えることができます．これは，p 個の dz と q 個の $d\bar{z}$ を含む $(p+q)$-形式から作られるものです．これは明らかに複素構造に依存しています．そしていろいろあるトーラスの複素構造は，たいてい互いに異なるのです．よって，T^2 の選び

方に依存しない 2 次元ベクトル空間 $H^1(T^2, \mathbb{C})$ 内に，T^2 の選び方に依存する部分空間 $H^{1,0}(T^2, \mathbb{C})$ を得ます．5 次超曲面の場合は部分空間の "旗"

$$
\begin{aligned}
H^{3,0} &\subseteq H^{3,0} \oplus H^{2,1} \\
&\subseteq H^{3,0} \oplus H^{2,1} \oplus H^{1,2} \\
&\subseteq H^{3,0} \oplus H^{2,1} \oplus H^{1,2} \oplus H^{0,3} = H^3
\end{aligned}
$$

を得ます．このようにして定まる複素構造のモジュライ空間から "旗多様体" への写像は，VHS の具体例です．

4 節で微分方程式から得た写像と，この VHS の写像が一致することを見るには，その微分方程式がトーラスの周期積分によってみたされることを見るだけで十分です．関数 $\dfrac{u_1}{u_0}$ は有名なモジュラー関数 J の逆関数と密接な関連があります．実際，

$$
J = \frac{1}{1728} \frac{(1+216z)^3}{z(1-27z)^3} = \frac{1}{1728}(q^{-1}+744+196884q+\cdots)
$$

が成り立ちます．ただし，$z = q-15q^2+171q^3-\cdots$（前に出てきた級数 $q = z+15z^2+279z^3+\cdots$ を z について解いたもの）です．より詳しい説明は[6]にあります．

まだ説明していない，重要で微妙な点があります．5 節では $H^0T^2 \oplus H^2T^2$ を用いましたが，6 節では $H^1T^2 = H^{1,0}T^2 \oplus H^{0,1}T^2$ を用いました．一般に，ミラー対称性は

（1） $\mathcal{M}$ の量子コホモロジーのある部分

を

（2） **別の**多様体 $\tilde{M}$（"ミラーパートナー"）のコホモロジーの**別の**部分

に対応づけます．$M = T^2$ の場合は $\tilde{M}$ もトーラスです．

7　終わりに

D-加群は平坦接続の概念に非常に近いので，ミラー対称性を語るのに D-加群を持ち出さないで済ますことも可能です．しかしながら，D-加群は言葉として大変便利なものであり，とりわけ多変数関数を扱う場合にその便利さは際立っています．なぜミラー対称性において D-加群が必要なのか？　この問いに対する最も説得力のある説明は「"ミラー対称性の D-加群" なるものが，量子コホモロジーとも VHS とも独立に，それ自体で重

要な幾何学的対象として存在するはずである．量子コホモロジーと VHS はその具現化にすぎない」という考えを検証することによって与えられるでしょう．そのような D-加群を特徴づけることは，目下の研究における興味深い課題です．

参考文献

［1］ A. B. Givental, *Homological geometry I, Projective hypersurfaces*, Selecta Math. **1** (1995), pp. 325–345.
［2］ ジェレミー J. グレイ（関口次郎・室政和訳），『リーマンからポアンカレにいたる線型微分方程式と群論』，シュプリンガー・フェアラーク東京，2002（原書第二版（2000）の訳）．
［3］ M. A. Guest, *From Quantum Cohomology to Integrable Systems*, Oxford Univ. Press, 2008.
［4］ A. Haefliger, *Local theory of meromorphic connections in dimension one (Fuchs theory)*, Algebraic D-modules, eds. A. Borel et al., Perspectives in Math. 2, Academic Press, 1987, pp. 129–149.
［5］ 堀田良之，『加群十話』（すうがくぶっくす 3），朝倉書店，1988.
［6］ A. Klemm, B. H. Lian, S. S. Roan, and S. T. Yau, *A note on ODEs from mirror symmetry*, Functional analysis on the eve of the 21st century, volume 2, eds. S. Gindikin et al., Progress in Math. 132, Birkhäuser, 1996, pp. 301–323.

[Martin Guest]
［おとふじ たかし］

10 ミラー対称性とホモロジー代数

深谷賢治
[京都大学大学院理学研究科]

1 はじめに

ミラー対称性予想には，名前がついている数学の他の予想と大きく違う点があります．それは，この予想はwell-definedではないということです．もう少し普通の日本語でいうと，ミラー対称性予想は，予想そのものの内容が依然として確定していない，という特徴があります．

これは一つには困った点で，「フェアープレーで問題解決を競う」という土俵にはなかなかのりません．誰がどこまで解いたかはっきりしないからです．一方，だからこういうミラー対称性のような問題の方が好きだ，という人たちもいます．

キャンデラス(Candelas)たちがミラー対称性を数学者の間でも有名にした論文の中で与えたのは，$\mathbb{C}P^4$ の5次超曲面の中の有理曲線の数の計算法でした．キャンデラスたちの議論には物理学的な洞察が含まれるので，数学の立場では，予想とみなすことになります．狭くはこれをミラー対称性予想と呼びます．狭い意味のミラー対称性予想は，ギヴェンタル(Givental)らが解決しました．しかし，「ミラー対称性予想」が解決されたとは思いません．

元来のミラー対称性は，2つの物理理論(場の理論)の一致とみなされます．「場の理論」というのが，数学ではまだ定義されていない概念です．場の理論に関する物理学の洞察から，さまざまな不変量(など)が得られます．2つの物理理論が一致すると，それらの不変量の間の等式が得られます．この等式の両辺は，多くの場合に数学的に厳密な定義が可能ですが，その背後にある場の理論は数学にまだなっていません．ですから，ミラー対称性予想を数学として定式化すると，不変量の間の等式になります．5次超曲面の中の有理曲線の数と，ある複素多様体の周期から決まる量の一致と

いう，キャンデラスたちの結論は，こうして得られる不思議な等式の系列の最初のものの一つでした．

同様な考え方での等式の導出は，その後も多くなされています．1990年代の第2次弦理論革命の中では，ミラー対称性の範囲に含まれない等式(しかし同様に物理理論の一致から数学的に定式化できる部分を引き抜いて得られる)がさらに多く生み出されました．21世紀に入ってもそれは依然として続いています．

ミラー対称性予想の最終的な主張が，一向に確定する気配を見せないのは，このように，そこから次々と「数学の新しい等式」が導出されているからです．あるいは，数学の等式を導出する物理的洞察そのものを，数学的に正しく定式化された予想として提示することが依然としてできないからです．

2　空間が等しいとはどういうことか

ミラー対称性予想は，数学的な定式化をあきらめると，次のように述べることができます．

> **カラビ(Calabi)-ヤウ(Yau)多様体Mに対して，そのミラーと呼ばれるカラビ-ヤウ多様体$M^\dagger$があり，M上のAモデルと呼ばれる弦理論と，$M^\dagger$上のBモデルと呼ばれる弦理論は等価である**[1)]．

AモデルとかBモデルとかいう言葉はもう少し後で説明します．ここで述べたいことは，2つの弦理論が等価であるということの意味です．数学者としては，1節で述べたようなミラー対称性理解の現状にはとても不満です．予想される等式をどれだけ証明しても，不満は解消しません．数学としては正当化されない物理的な洞察を経ずしては，等式の成り立つ理由や意味が分からないからです：弦理論を数学的に正確に定式化し，弦理論をMと$M^\dagger$から作るAとかBとかいう処方箋を与え，その上で，「弦理論」の同型を厳密に証明することにより，等式たちをいっぺんに導く：これが望ましい証明でしょう．今回述べたいのは，それに向けた試みについてです．

「弦理論」とは何かという問題を扱うかわりに，2つの「弦理論」が等しいというのはどういうことかを考えることにします．さらに問題を次のよ

うに拡大します．

2つの「空間」が等しいというのはどういうことか．

この言い換えには，いくつかの背景があります．

(甲)　ミラー対称性での M や $M^\dagger$ は，我々が直接観測できるサイズよりずっと小さく，それを我々が感知できるのは，それから間接的に現れる諸量を通してのみであると思われる．

(乙)　したがって，M 上のAモデルと呼ばれる弦理論と，$M^\dagger$ 上のBモデルと呼ばれる弦理論が等しい，という命題は，空間 M が空間 $M^\dagger$ に等しいという命題と差がない．

(乙)で，「空間 M が空間 $M^\dagger$ に等しい」と述べました．しかし，M や $M^\dagger$ はカラビ-ヤウ多様体という多様体で，一般には異なる多様体になります．したがって，等しいという意味は，普通の多様体論の意味とは違った意味になります．

さらに，いくつかの場合(特にカラビ-ヤウ多様体より一般の場合にミラー対称性を拡張した場合)には，M の方が多様体であっても，$M^\dagger$ が多様体にならずに，別のものになる場合があります．

ミラー対称性が空間という概念の一般化を示唆しているということの背景がここにあります．

3　層とトポス

空間を「点の集合」を超えて捉えることをかつて推進したのは，グロタンディーク(Grotendieck)でした．この章のテーマであるホモロジー代数も，そのためにグロタンディークが使った主要な道具立ての一つです．2つのカラビ-ヤウ多様体が「等しい」ということを考えるには，グロタンディークの考え方が参考になります．

空間を一般化するときに，よく語られる考え方の一つが，空間をその上

1)　カラビ-ヤウ多様体とは限らない場合にもミラー対称性は拡張されつつあります．

の関数の作る環で置き換えるという考え方です．これが典型的に使われるのは，「非可換幾何学」と呼ばれる多くの試みの中でです[2)]．スキームという概念にも，この考え方が用いられます．弦理論に関わる数学の最近の研究では，それよりさらに一般化された「スタック」などもしばしば現れます．

「関数の環」が違っても，実は同じ「空間」を表している，ということの例には，森田同値という環論の現象があります．その説明をします．(単位元 1 を持つ)環 R を考え，R を係数とする $n\times n$ 行列全体を $M_n(R)$ とします．次の主張が森田同値の典型例です．

R 上の加群全体と $M_n(R)$ 上の加群全体の間には，一対一の対応がある．

R 上の加群 V に対して，V を n 個並べた加群 $W=V^n=V\oplus\cdots\oplus V$ を考え，その上に $M_n(R)$ 上の加群の構造を次のように与えます．

「V^n の元は縦ベクトルとみなし，$M_n(R)$ を普通の行列のかけ算で書ける．」

逆に $M_n(R)$ 上の加群 W を考えます．E_1 を 1×1 成分だけが 1 であとは 0 である行列とすると，$V=\{E_1\cdot w|w\in W\}$ は R 上の加群になります．

2 つの対応 $V\mapsto W$ と $W\mapsto V$ が，互いの逆対応になっていることが容易にわかり，求める対応が得られます．

森田同値があることを根拠に，R の表す「空間」と $M_n(R)$ の表す「空間」は同じである，と考えます．

加群は環に対して定まる概念ですが，より大域的な対象たとえば多様体やスキームに対しては，層が加群に対応する概念です．

位相空間 X の上の層というのは，大体 X の開集合 U に対してその上の「関数の集合」$\mathcal{F}(U)$ を対応させる対応である，と考えればよいと思います．多様体やスキームに対しては，構造層と呼ばれる環の層があります．たとえば，多様体 M なら，C^∞ 関数の層 C^∞ がそれにあたります．C^∞ は開集合 $U\subset M$ に対して，U 上の C^∞ 関数全体 $C^\infty(U)$ を対応させる対応です．$\mathbb{C}^\infty(U)$ には足し算やかけ算が定まり，環になりますから，これは環の層です．また，方程式

$$f_1(x_1,\cdots,x_n)=0,\qquad \cdots,\qquad f_k(x_1,\cdots,x_n)=0$$

で定まる $\mathbb{C}^n$ の部分集合(アフィン代数多様体) X の場合には，環

$$R=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_k)$$

から X の上の層 $\mathcal{O}_X$ を定義できます．

加群に対応するといったのは，このような構造層の上の加群の層のことです．R 加群という概念を大域化したのが $\mathcal{O}_X$ 加群の層という概念です．$\mathcal{O}_X$ 加群の層の代表的な例は，X 上のベクトル束とか，あるいは X の部分多様体などから作ることができます．それらは連接層という層になります．層や連接層という概念の起源は多変数複素関数論などにあり，ルレイ(Leray)や岡潔がその基礎を築きました．アンリ・カルタン(Cartan)らのブルバキ学派の数学者によって，それは整理され数学の多くの分野に取り入れられました．ホモロジー代数学という分野もまた，その時代に，層の理論の誕生と密接に関わりながら発展しました．アンリ・カルタンはアイレンベルグ(Eilenberg)やマックレーン(MacLane)とともにホモロジー代数学の建設者の一人です．

セール(Seere)は1950年代に「代数的連接層」という論文を書き，層の理論のもとに代数幾何学を建設する基礎を与えました．それを発展させてグロタンディークのスキーム論が現れるのです．これと並行して小平邦彦らは層の理論をもとに複素多様体論を代数幾何から独立した分野として打ち立てました．

このように，層の考え方は，代数幾何学・複素多様体論では50年以上も前から主要な考え方でした．さらにグロタンディークは空間概念をスキームからトポスに拡張するとき，次のような考え方を用いました．

空間とはその上に層を考えることができるなにかである．

こうして，空間から点が消えてなくなりました．つまり，空間そのものは忘れて，その上の層(構造層の上の連接層)だけを考えるということになりました[3]．

2） 弦理論の数学的定式化の試みの中でも，非可換幾何学はしばしば現れます．

3） 誤解を避けるために付け加えますが，ミラー対称性では空間をその上の層の圏で置き換えるという思想は使いますが，まだトポスそのものはあまり使われてはいません．

4 導来圏

層たち(構造層の上の連接層たち)は圏を作り，アーベル圏と呼ばれるものになります．圏とは，「対象」(のなす「集合」)と，2つの対象の間に「射」のなす集合が決まっているものです．層を対象とし，2つの層の間の射とはその間の準同型を考えるというのが，層の圏です．$\mathcal{O}_X$ 加群の圏をここでは $Sh(X)$ と書くことにしましょう．

$Sh(X)$ のひな形は，環 R 上の加群の圏です．つまり，対象を R 上の加群としその間の R 加群としての準同型を射とした圏です．森田同値は，たとえば，R の加群の件と，$M_n(R)$ 上の加群の圏の同型を与えます．

空間 X，特にカラビ-ヤウ多様体 X を，その上の連接 $\mathcal{O}_X$ 加群の圏で置き換えるというのが，空間が等しいということを数学的に定式化するときに現れる重要な考え方で，B モデル側で現れます．より詳しくいうと，ミラー対称性では圏 $Sh(X)$ ではなく，その導来圏が使われます．導来圏の説明をします．

ホモロジー代数の始まりはホモロジー群の定義です．(エミー・ネーター(Noether)によるそうです．) ホモロジー群は加群の鎖複体 $(\{C_k\}_{k=0}^n, \{\partial_k\}_{k=1}^n)$ から定義されます．ここで C_k は加群で，$\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ 準同型写像です．∂_k が満たすべき重要な条件が

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \qquad (1)$$

という等式で，幾何学的には集合の境界の境界は空集合である，という事実に対応します．

鎖複体はもともとはホモロジー群を定義するために導入されました．ホモロジー群は $\partial_k x = 0$ なる x 全体 $\mathrm{Ker}\,\partial_k$ を，$x = \partial_{k+1} y$ なる y が存在するような x 全体 $\mathrm{Im}\,\partial_{k+1}$ で割った商加群です．ホモロジー代数が発展するにつれて，ホモロジー群だけではなく，鎖複体そのものを使って研究することがなされるようになりました．空間 X に鎖複体 $S(X)$ を対応させ，そのホモロジー群を調べるというのが，ホモロジー論ですが，鎖複体 $S(X)$ の方がホモロジー群より多くの情報を含んでいます．しかし鎖複体 $S(X)$ は空間 X からは一意に決まるわけではありません．したがって，鎖複体の持っている情報のなかから，鎖複体 $S(X)$ の作り方によらず空間 X か

ら決まる情報を取り出す必要があります．

鎖複体の弱同形という概念がそのような方法を与えます．R 加群の鎖複体の間に，弱同値という同値関係が決まることになり，「R 加群の鎖複体の弱同値類」を対象とする圏が定まります．この圏を，「R 加群の圏の導来圏」と呼びます．

導来圏はより一般のアーベル圏に対しても作ることができ，特に $Sh(X)$ の導来圏 $\mathbb{D}(X)$ が決まります．圏 $\mathbb{D}(X)$ が B モデルの弦理論では重要な役割を果たします．すなわち，

X 上の B モデルの弦理論の D-ブレーンの作る圏は $\mathbb{D}(X)$ のことである．

この命題を説明します．$\mathbb{D}(X)$ の対象の例は，2 つのベクトル束 E_1, E_2 が X にあり，その間に準同型写像 $\partial : E_1 \rightarrow E_0$ があるようなシステムです[4]．そのホモロジー群は，

$$H_1 = \mathrm{Ker}\,\partial \subset E_1 \quad と \quad H_0 = \frac{E_0}{\mathrm{Im}\,\partial}$$

です．∂ が 0 なら，$H_1 = E_1$，$H_0 = E_0$ ですが，∂ が 0 でないと，H_k は E_k より小さくなります．このことを，∂ が E_1, E_0 をキャンセルさせて小さくすると見なします．B モデルの D-ブレーンを導来圏を用いて解釈できるというのは，2000 年前後に物理学者の間で理解されたことのようです．

圏 $\mathbb{D}(X)$ の重要性は数学では昔から知られており，たとえば，向井茂は，トーラスや K3 曲面(どちらもカラビ-ヤウ多様体の典型)で，X と Y が異なるにもかかわらず圏 $\mathbb{D}(X)$ と圏 $\mathbb{D}(Y)$ が同形になる現象を発見し深く研究していました．それは「フーリエ変換の層の理論版」とみなされ，フーリエ-向井変換と呼ばれています．物理での進展と刺激し合いながら，導来圏 $\mathbb{D}(X)$ の研究は代数幾何学でも盛んになっていてます．パイ安定性($\mathbb{D}(X)$ の対象に対する概念)とケーラー構造のモジュライとの関係や，$\mathbb{D}(X)$ と双有理幾何学との関係などが進展中です．

4）導来圏では本当はホモロジーではなくコホモロジーにしますが，ホモロジーで説明を始めたのでホモロジーで通すことにします．

5　AモデルとBモデルについて

X 上の B モデルの弦理論の D-ブレーンの作る圏は $\mathbb{D}(X)$ のことである，と述べました．B モデルと A モデルについて，もうすこしだけ述べます．数学としての定義はされていないので，特徴をいくつか述べます．

（い）　B モデルの量は M の複素構造から決まり，A モデルの量は M のシンプレクティック構造から決まる．

（ろ）　B モデルでは多くの量が量子補正を受けない．A モデルの量には量子補正がある．

上で使った言葉を説明します．カラビ-ヤウ多様体というのは，複素多様体で，リッチ曲率が 0 のケーラー計量を持つものです．多様体の複素構造は接ベクトルを接ベクトルに写す対応 J で $J \circ J = -1$ なるもので決まります．（$J = \sqrt{-1}$ 倍する写像と思ってかまいません．）リーマン計量 g と複素構造 J があると微分 2 形式 ω が

$$\omega(X, Y) = g(X, JY) \tag{2}$$

で決まります．（正確に言うと微分 2 形式の満たすべき $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$ という条件は，g が J 不変でないと成り立ちません．）微分 2 形式 ω の外微分が 0 という条件が，計量がケーラーであるという条件です．ω がシンプレクティック構造を決めます．逆に，g と ω がある整合性の条件を満たしていると，それから J が(2)で決まります．

複素多様体とかシンプレクティック多様体には計量 g はあらかじめ決まっていないので，複素多様体にはシンプレクティック構造は定まっておらず，シンプレクティック多様体には複素構造は定まっていません．A モデルの量は，シンプレクティック構造のみにより，B モデルの量は，複素構造のみによるというのが，(い)の主張です[5)]．

(ろ)はミラー対称性の研究の中心的な部分により深く関わります．前の節で，層の理論は複素多様体や代数多様体の研究の古くからの中心であると述べました．その意味で，これらは，古典的な代数幾何学や複素幾何学の範囲に入ります．そこから計算される量は，層係数コホモロジーの種々

の量，そのコホモロジー群のランクやその上に定まる構造の構造定数のようなもので，古典的な対象です．B モデルの弦理論では，そのような古典的な幾何学の量が直接弦理論の量として現れ，「量子補正」はありません．もう一つ大事な点は，現れる対象が局所的に意味を持つものから組み立てられていることです．

層という概念は局所的です．層 $\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{F}(U)$ の元 s は空間 U 上の各点の近傍で 0 ならば，$s=0$ になります．また，層は局所的にあるものを貼り合わせて大域的なものを作ることができます．これが局所性で層の中心的な性質です．情報が空間を伝わる早さが有限であるという，古典的な相対論的量子力学の局所性とも関わるのだと思います．(ろ)の主張，つまり B モデルでは量子補正がないという主張にも関わります．

一方 6 節で説明する A モデルでは，そのような局所性がありません．つまり A モデルの量は空間で局所的に決まる量を積分しては得られません．

局所的な量の積分で表せないものの典型は，量子コホモロジー環に現れる，量子補正です．量子コホモロジー環は普通のコホモロジー環のカップ積を量子補正して得られました．ド・ラーム コホモロジーで表すと，カップ積の構造定数は積分

$$\int_{x\in M} u_1(x) \wedge u_2(x) \wedge u_3(x) \tag{3}$$

で表されます．これはド・ラーム コホモロジー群 $H^*(M)$ 上の 3 次の写像

$$H^*(M)\otimes H^*(M)\otimes H^*(M) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{4}$$

になります．カップ積の局所性とは，積分(3)が u_1, u_2, u_3 の同じ点 x での値を考えてなされていることを指します．つまり，これらの「場」は同一の点同士でしか，相互作用をしません．

量子変形はそうはなりません．$\mathcal{M}_3(\beta)$ をホモロジー類が $\beta\in H_2(M)$ であるような，M への S^2 からの正則(holomorphic)写像 $\varphi: S^2\to M$ 全体とします．$\mathcal{M}_3(\beta)$ が定めるカップ積への量子補正は

5) ただし，話を一般化していくとだんだんこの点は微妙になります．たとえば，前の節で触れたパイ安定性は B モデルの話ですが，カラビ–ヤウ多様体のシンプレクティック構造に関わります．

$$T^{\beta\cap\omega}\int_{\varphi\in\mathcal{M}_3(\beta)} u_1(\varphi(0)) \wedge u_2(\varphi(1)) \wedge u_3(\varphi(\infty))$$

という積分になります．$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\infty)$ は違う点ですから，この「相互作用」は離れた点同士でおこっています．

このようにAモデルでは，局所性が失われています．ですからAモデルの量は，空間全体に関わる大域的な量になります．5次超曲面の有理曲線の数，というのはその典型です．局所的な量と非局所的な量では，前者の方が計算が容易です．ミラー対称性の威力は，Aモデルで現れる非局所的な量をBモデルでの局所的な計算に帰着するところにあります．

6 フレアーホモロジーとホモロジー的ミラー対称性

5節では，Aモデルで現れる典型的な量として量子カップ積の構造定数を考えました．これは，キャンデラスたちが考えた，有理曲線の数に対応する量です．4節で述べたように，Bモデルの「空間」を我々はその上の層の作る圏 $Sh(M^\dagger)$ あるいはその導来圏 $\mathbb{D}(M^\dagger)$ で置き換えました．この圏 $Sh(M^\dagger)$ のAモデルにおける対応物は，M 上のフレアーホモロジーから定まる圏 $Lag(M)$ である，というのがコンツェヴィッチ(Kontsevich)のホモロジー的ミラー対称性予想です．圏の一致(同型)というのは，数の一致に比べるとずいぶん精緻な主張で，これによって空間が等しい，という，元来のミラー対称性の主張に近づくことができます．

Aモデル側での圏 $Lag(M)$ を説明しましょう．Bモデル側での圏 $\mathbb{D}(M^\dagger)$ の対象はD-ブレーンであると述べました．Bモデル側ではその理由はあまり見やすくなく，Aモデル側の方が明快です．

D-ブレーンとは何でしょうか．それは，弦の境界条件として現れるもの，です．ちなみにDはディリクレ(Dirichelet)の頭文字で，ディリクレ境界条件が名前の由来です．たとえば，円盤 $D^2 = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 < 1\}$ 上の関数 f に対して，ラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を考えるとき，その境界 $S^1 = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 = 1\}$ での値 $f(\cos\theta, \sin\theta)$ を指定するのがディリクレ境界条件です．

弦理論では主役は弦，つまりひもです．ひもが時間とともに動いていく跡は曲面 Σ になります．したがって，多様体 M のなかのひもの軌跡は

$\varphi : \Sigma \to M$ という写像です．ひもが開いている，つまり円周ではなくて区間である場合には，Σ に境界があることになります．すなわち，境界付きの曲面 Σ からの写像 $\varphi : \Sigma \to M$ 考えることになります．

写像 φ が満たすべき方程式，つまり弦の運動方程式は，位相的弦という(簡単な)場合には φ は正則写像になるという方程式になります．言い換えると，コーシー(Cauchy)-リーマン(Riemann)方程式が運動方程式です．

コーシー-リーマン方程式は楕円型方程式です．境界がある多様体(この場合は曲面)で楕円型方程式を考えるには，境界条件が必要になります．5節にでてきた $\mathcal{M}_3(\beta)$ は S^2 からの正則写像の空間です．これを S^2 でなく境界があるリーマン面にしたものが，D-ブレーンを考えたときの，A モデルから得られる量になります．

$\mathcal{M}_3(\beta)$ は有限次元の空間になります．境界条件をうまくとると，境界があるリーマン面からの正則写像の空間も有限次元になります．適切な境界条件は

$$\varphi(S^1) \subset L \tag{5}$$

という条件，すなわちディリクレ境界条件です．L は $\dim M/2$ 次元の多様体で，さらに，総実すなわち L の接空間には複素ベクトル空間が含まれないという条件が必要になります．(この条件がないと，方程式が境界で退化してしまい，うまく解のモジュライ空間が作れません．) ただし，D-ブレーンとしては総実よりは強いラグランジュ部分多様体という条件が現れます．

A モデルではシンプレクティック構造が主役である，と前に書きました．シンプレクティック構造というのは，微分2形式 ω で $d\omega = 0$ になり，また，ω が各点で非退化なものです．$2n$ 次元シンプレクティック多様体 M の，n 次元部分多様体 L がラグランジュ部分多様体である，というのは，ω が L に制限すると，0になることをいいます．ラグランジュ部分多様体 L をとり，境界条件(5)を満たす φ を考えると，積分 $\int \varphi^*\omega$ が φ の連続変形で不変になります．

8章で，フレアーホモロジーの説明をしたときは，ループ空間 $\Omega(M)$ つまり，$S^1 \to M$ なる写像を考え，その上の汎関数の極値問題を考えました．そうすると，そのトンネル効果が量子コホモロジーと関係がつく，とも述べました．

この節で考えているD-ブレーンがある状況では，$\Omega(M)$ を少し取り替えています．つまり，2つのラグランジュ部分多様体(つまりD-ブレーン) L_0, L_1 を考えて，

$$\Omega(L_0, L_1) = \{l : [0,1] \to M \mid l(0) = L_0,\ \ l(1) = L_1\}$$

を考えます．これは L_0 から出発して，L_1 で終わるひもを考えることになっています．この上でモース理論を考えるのですが，使う汎関数 $\mathscr{A}$ は次のようなものです．$l, l' \in \Omega(L_0, L_1)$ として，この2つをつなぐ $\Omega(L_0, L_1)$ の道 $\gamma(s)$ を考えます．つまり $\gamma(s) \in \Omega(L_0, L_1)$ で，$\gamma(0) = l,\ \gamma(1) = l'$ なるものを考えます．このとき $\varphi^\gamma : [0,1] \times [0,1] \to M$ なる写像が

$$\varphi^\gamma(s, t) = \gamma(s)(t)$$

で得られます．($\gamma(s)$ は $[0,1] \to M$ なる写像でしたから，それに t を代入したものが右辺です．) 汎関数 $\mathscr{A}$ は

$$\mathscr{A}(l') - \mathscr{A}(l) = \int_{[0,1]\times[0,1]} \varphi^{\gamma *}\omega$$

となるようにとります．(実はそういう $\mathscr{A}$ は1価関数ではとれず，多価なります．)

汎関数 $\mathscr{A}$ に対するモース理論を展開して定義されるのが，2つのラグランジュ部分多様体の組に対するフレアーホモロジー $HF(L_0, L_1)$ です．

これは，「量子補正」がない場合は，おのおのの交点 $p \in L_0 \cap L_1$ に対して基底が一つあるような $\mathbb{Q}$ ベクトル空間になります．$\mathscr{A}$ の臨界点が $p \in L_0 \cap L_1$ に対応する $l_p(t) \equiv p$ であることによります．)

しかし実際には量子補正があります．量子補正は図1のような正則写像 $D^2 \to M$ を数えることで得られます．

圏 $Lag(M)$ というのは，大体，その対象がラグランジュ部分多様体 L で，L_0 から L_1 への射全体の集合がフレアー(Floer)ホモロジー $HF(L_0, L_1)$ である圏です．圏を定義に必要な射の合成：

$$HF(L_0, L_1) \otimes HF(L_1, L_2) \longrightarrow HF(L_0, L_2) \tag{6}$$

は，図2のような正則3角形をかぞえて定義されます[6)]．コンツェヴィッチのホモロジー的ミラー対称性予想は

$$\mathbb{D}(M^\dagger) \cong \mathbb{D}(Lag(M)) \tag{7}$$

です．右辺は圏 $Lag(M)$ の導来圏です．

この予想は現在のところ，2次元トーラス(楕円曲線)については完全に，

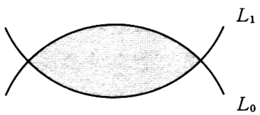


図1

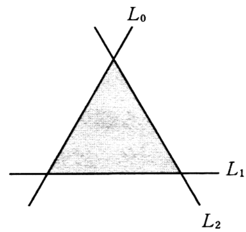


図2

高次元トーラスについては部分的に，3次元射影空間の中の4次曲面については完全に，解かれています．これらはカラビ-ヤウ多様体の場合ですが，その一般化には，さらにいろいろと解かれている場合があります．コンツェヴィッチは予想を最初に(1993年)提唱するとき，「サイエンスフィクション」といったそうですが，現在ではだいぶ解決への道が見えてきました．

筆者がオゥ(Oh)-太田-小野氏と10年ぐらいやっている仕事の1つの応用は，圏 $Lag(M)$ の厳密な定義です．その部分は2006年に完成しましたので，その時点でやっと，ホモロジー的ミラー対称性予想(7)が数学の予想になったといえます．

7 不変量の圏化について

フレアーホモロジーというのは，「交点数の群化」というべきものです．つまり，そのランクの交代和をとると交点数になるようなホモロジー論です．フレアーホモロジーを取り込んだ圏 $Lag(M)$ は，さらに交点数の圏化(カテゴリー化，categorification)というべきものです．

不変量の圏化は最近ではいろいろなされています．有名なものには，結び目や3次元多様体の量子不変量の圏化である，ホヴァノフ(Khovanov)ホモロジーなどがあります．

6) 実は今ここで書いたことは正確ではなく，いろいろと修正が必要です．それについては，8節で少しだけ触れます．

不変量の圏化の始まりはシーガル(Segal)による共形場の理論の定式化です．シーガルは共形場の理論をある圏からの函手である，として定義しました．その圏は，対象がS^1の有限個の和で，その間の射はそれらのS^1を境界に持つリーマン面である圏です．

フレアーホモロジーには，ゲージ理論のものと，シンプレクティック多様体に対するものがあります．ゲージ理論のフレアーホモロジーは3次元多様体に対して，群を対応させます．これは4次元多様体のドナルドソン(Donaldson)不変量と密接に関係があります．この4-3次元のゲージ理論の関係を2次元に延長するには，境界つき3次元多様体Mのフレアーホモロジーを考える必要があります．1992年のヲーウィック(Warwick)大学での研究会の講演中に，ドナルドソンは図2と同じ図を書き，境界つき3次元多様体のフレアーホモロジーは，このような圏を考えることが第一近似であろう，と述べました．そこに出てくるシンプレクティック多様体はMの境界である2次元多様体上の平坦接続の作る多様体です．

それを聞いていた筆者は，圏をA無限大圏という概念に拡張すれば，境界付き3次元多様体のフレアーホモロジーは，その圏からの函手としてとらえられることに気づきました．これを1993年の谷口シンポジウムで発表しましたが，それを聞いていたコンツェヴィッチは，ホモロジー的ミラー対称性予想(7)に到達し，その年のマックス・プランク研究所の年会で発表しました．

境界付き3次元多様体のフレアーホモロジーに関わるもともとの問題については，現在でも当時の構想は実現していません．最近ようやく実現されそうな兆候があらわれています．2次元から4次元までゲージ理論を積み上げていくという構想そのものは，少し異なった形で，サイバーグ(Seiberg)-ウィッテン(Witten)理論に一致すると思われている，オスバス(Ozvath)-サボー(Szabo)のヘーガードフレアー理論，として実現されています．

8 ホモロジー代数と場の理論

圏$Lag(M)$は，通常の圏と考えるのではなく，A無限大圏と考えるべきです．そうしないとホモロジー的ミラー対称性予想も成立しません．この

A 無限大の A というのは，結合的(Associative)の頭文字です．圏で決まっている重要な構造は射の合成(6)です．射の合成は結合法則

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h) \tag{8}$$

を満たします．圏が群の一般化とみなせるのは，この合成の結合性が理由です．さらに，ここで考えている圏では，射の集合には足し算が定義されるので，環の一般化とみなすこともできます．合成(6)の構造定数が，量子コホモロジー環の構造定数の D-ブレーンがある場合の類似になります．

導来圏の説明をするときに，鎖複体からホモロジーに移ると情報が失われると書きました．圏 $Lag(M)$ の場合にも，射の集合をコホモロジー群 $HF(L_0, L_1)$ にしてしまうと，重要な情報が失われてしまいます．「空間」の代替物として，圏 $Lag(M)$ を使うには，コホモロジーにすると失われる情報も残しておかなければなりません．コホモロジー群をとらずに，鎖複体のままその種々の構造を取り扱うには，ホモロジー代数が必要になります．そのようなホモロジー代数は，1970 年代以前から代数的位相幾何学でいろいろ研究されていました．構造をもった鎖複体のホモロジー代数が場の理論の研究に必要である，ということが次第に明確になってきたのは，1980 年代後半から 1990 年代前半です．ウィッテンは，非可換幾何学と弦理論の関係を，80 年代後半に述べましたが，そこでは A 無限大代数が現れています．ツヴィーバック(Zwiebach)は，90 年代に開いた弦の場(string field theory)を研究しましたが，そこでも鎖複体のホモロジー代数と同様の考察が現れます．

フレアーホモロジーの間の積構造は，A 無限大あるいは A 無限大圏として定式化するのが，正しいやり方です．一般の場合のフレアーホモロジーは，定義のためにすら，A 無限大構造を考えに入れる必要があります．これは式(1)が一般のフレアーホモロジーでは成立しなくなるという現象(BRST アノマリー)がその理由です．

A 無限大構造には，開いたリーマン面のうちの円盤しか関わらず，開いた弦理論の一部にしか対応しません．一般の開いた弦を扱う，ホモロジー代数的枠組みは，現在できつつありますが，まだ完成していません．

最後に，A 無限大代数などの高次の積構造が現れてくる理由を述べて，この章を終わりたいと思います．

ホモロジー群に入る積構造はカップ積の親戚です．カップ積は(4)のよ

うに読み替えることができますから，3次関数に対応します．すべての情報を読み取るためには，4次，5次，…などすべての次数の関数を考えなければなりません．もともとの鎖複体上の構造には，3次までのもの(つまり積構造まで)しかなかったとしても，情報をホモロジー群に押し込もうとすると，4次以上の項も入ってきます．

これは次のように説明できます．ホモロジー群は重さが0の粒子に対応し，その間の積構造は相互作用を表します．重さが0の粒子の間の相互作用には，重さが正のものが中間状態として現れる可能性があります．「積構造をホモロジーに押し込む」には，中間状態の効果がホモロジーの積構造に入っているようにすることが必要です．これは物理で繰り込みと呼ばれる操作の一種で，その結果，もともと3次までの項しかなかった相互作用に高次の項が現れます．

ループがないグラフに対応する効果が，A無限大代数(対称性の種類によりL無限大代数など別の構造も現れます)です．ループがある場合も含めると一般のリーマン面からの写像の効果のホモロジー代数による定式化を与える代数構造になるはずです．

［ふかや　けんじ］

11 特異点とミラー対称性

高橋篤史
[大阪大学大学院理学研究科]

1 はじめに

5章では特異点から位相的場の理論が導かれる様子を述べました．この章ではホモロジー的ミラー対称性に関連した話題を解説したいと思います．

特異点とは，「周りの構造と比較したときに，際立って性質が異なっている，とくに優れた性質をもつ点」のことでした．より具体的には，ある図形の部分図形が一点に潰れることにより，その部分図形が持っていた情報が凝縮し，その特別な一点が多くの対称性や大局的構造の情報を持ちました．

ここで注目するのは，超曲面特異点と呼ばれる，1つの多項式の零点集合であらわされるような図形に現れる特別な点で，非常に良い性質をもった特異点です．5章でも書きましたが，それは滑らかな非可換多様体を可換幾何学(複素代数多様体)で見ているがために，その性質が特異性として現れていると解釈できるものです．この章ではその雰囲気を伝えられることを期待しています．

2 ホッジ数と位相的ミラー対称性

さて，特異点のミラー対称性を見ていく前に，カラビ-ヤウ多様体の位相的ミラー対称性の話をしましょう．標準束が自明であるような代数的な複素多様体はカラビ-ヤウ多様体と呼ばれました．もう少しわかりやすく書くと，5章で登場した複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の部分空間 X で，数個の斉次多項式 $f_1(x_0, \cdots, x_n), \cdots, f_k(x_1, \cdots, x_n)$ の共通零点として定義され，第1チャーン類 $c_1(X)$ が零であるもの，のことです．典型的な例としては，複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の中で $n+1$ 次の多項式の零点としてあらわされる図形です．

複素多様体の図形的特徴をあらわす量として，ホッジ数と呼ばれる整数 $h^{p,q}(X):=\dim_{\mathbb{C}} H^q(X,\Omega_X^p)$ があります．これは図形 X に部分図形がどれぐらい入っているか，どんな(高次元の)穴が図形 X にあるか，ということをわかりやすくあらわす不変量です．先の複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の場合では，$p=q=i=0,\cdots,n$ のとき $h^{i,i}(\mathbb{CP}^n)=1$ で，それ以外の $p,q=0,\cdots,n$, $p\neq q$ に対してはすべて $h^{p,q}(\mathbb{CP}^n)=0$ となっています．カラビ–ヤウ多様体は，その定義により $h^{\dim_{\mathbb{C}} X,0}(X)=1$ が成り立つのが特徴です．

ホッジ数は対称性をいくつかもっています．例えば複素数に対して複素共役をとるという対称性がありますが，これは複素多様体のホッジ数の対称性に拡張され，入れ替え $h^{p,q}(X)\leftrightarrow h^{q,p}(X)$ を導きます．この操作が図形の対称性であることによって，複素多様体のホッジ数が等式

$$h^{p,q}(X)=h^{q,p}(X)$$

を満たすことが示されます．また，**セール双対性**という不思議な対称性があって，同様に等式

$$h^{p,q}(X)=h^{d_X-p,d_X-q}(X), \qquad d_X:=\dim_{\mathbb{C}} X$$

が成り立つことが知られています．

この2つの対称性をみてみると，「$h^{p,q}(X)$ と $h^{d_X-p,q}(X)$ を入れ替える対称性もあるのでは？」と思いませんか？ そうです．この残されたホッジ数の入れ替えをおこす対称性こそがミラー対称性なのです．ただし，今度は1つの図形の上の対称性ではなく，異なる図形の間を結ぶ対称性であることが興味深いところです．つまり，2つの多様体 X と Y に対して，ミラー対称性は

$$h^{p,q}(X)=h^{d-p,q}(Y), \qquad d:=\dim_{\mathbb{C}} X=\dim_{\mathbb{C}} Y \qquad (1)$$

というホッジ数の等式を導く対称性です．X や Y としては連結な代数的複素多様体を考えることにすると，$h^{0,0}(X)=1=h^{0,0}(Y)$ であるので，等式(1)が成立するためには $h^{d_X,0}(X)=1=h^{d_Y,0}(Y)$ が成り立つこと，すなわち X と Y はカラビ–ヤウ多様体であることが必要となります．

異なる多様体 X と Y の組を同時に考えることの難しさによって，ミラー対称性は複素共役・セール双対性という自然な対称性の延長として解釈できる対称性でありながら，長い間発見されませんでした．

式(1)を満たすような2つのカラビ–ヤウ多様体の組は**位相的ミラー対**と呼ばれます．では，位相的ミラー対はどのように構成すればよいでしょう

か？ ある答えが特異点論に基づいて与えられました．

3 ヤコビ環のポアンカレ多項式

5章と同様に，ここでも超曲面特異点，つまり1つの多項式の零点の集合における特異点，を考えましょう．多項式 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ で定まる図形の特異点というのは，$f = \partial f/\partial x_1 = \cdots = \partial f/\partial x_n = 0$ を重複度を込めて考えた図形のことでした．とくにヤコビ環

$$J(f) := \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \qquad (2)$$

が $\mathbb{C}$ 上有限次元となり，また，ある正の整数 $a_1, \cdots, a_n$ と h に対してオイラー・ベクトル場 E を

$$E := \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{h} \cdot x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

で定めるとき，$Ef = f$ が成り立つものを考えることにします．これらの条件を満たす特異点を（重み付き）斉次孤立超曲面特異点と呼びます．例えば，A_l-型特異点 $f(x) := x^{l+1}$ に対しては，$J(f) = \mathbb{C}[x]/(x^l)$ で，これは $\mathbb{C}$ 上 l 次元だからもちろん有限次元で，また，$a := 1$，$h := l+1$ とおくと

$$\frac{1}{l+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = x^{l+1} = f(x)$$

なので，上の2つの条件は満たされています．

正の整数 $a_1, \cdots, a_n$ は各変数 x_i の重み，h は多項式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の重みで，E で計った f の重みが1になるように正規化しています．これらの重み付けによってヤコビ環 $J(f)$ は次数付き環になります．つまり

$$J(f) = \bigoplus_{d \in \frac{1}{h}\mathbb{Z}_{\geq 0}} J(f)_d,$$

$$J(f)_d = \{g \in J(f) \mid Eg = dg\}$$

という分解をもちます．このとき，

$$\chi(f, t) := \sum_{d \in \frac{1}{h}\mathbb{Z}_{\geq 0}} \dim_{\mathbb{C}} J(f)_d \cdot t^d$$

という級数を考えて，これをヤコビ環の**ポアンカレ級数**と呼びます．ヤコビ環 $J(f)$ は有限次元であることを仮定しているので，$\chi(f, t)$ は $t^{1/h}$ の多項式になり，**ポアンカレ多項式**と呼ばれます．とくに，式(2)により，

$$\chi(f,t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{t^{1-\frac{a_i}{h}}-1}{t^{\frac{a_i}{h}}-1}$$

が成り立つことが簡単に示されます．そして，この式からポアンカレ多項式 $\chi(f,t)$ は，双対性

$$\chi(f,t) = t^{d_f}\cdot\chi(f,t^{-1}),$$
$$d_f := \sum_{i=1}^{n}\left(1-2\frac{a_i}{h}\right)$$

という重要な性質をもちます．A_l-型特異点 $f(x) = x^{l+1}$ の例で考えると，

$$\chi(x^{l+1},t) = 1+t^{\frac{1}{l+1}}+\cdots+t^{\frac{l-2}{l+1}}+t^{\frac{l-1}{l+1}},$$
$$d_{x^{l+1}} = \frac{l-1}{l+1}$$

となって，$\dfrac{i}{l+1} \leftrightarrow \dfrac{l-1-i}{l+1}$ という入れ替えでポアンカレ多項式が不変になっていることが確認できます．

$\mu_f := \chi(f,1)$ とおき，ポアンカレ多項式を

$$\chi(f,t) = \sum_{i=1}^{\mu_f} t^{p_i}, \qquad 0 =: p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_\mu := d_f$$

のように展開するとき，双対性は $p_i + p_{\mu_f-i+1} = d_f$ と表現できます．つまり**指数** p_i，$i = 1,\cdots,\mu_f$ たちの平均は $d_f/2$ であることがわかります．

指数の平均がわかったので，指数の分散も調べておきましょう．演習問題に最適な程度の簡単な計算で

$$\sum_{i=1}^{\mu_f}\left(p_i-\frac{d_f}{2}\right)^2 = \frac{d_f}{12}\cdot\mu_f \tag{3}$$

となることがわかります．

4　不思議な類似性

もう一度カラビ-ヤウ多様体の例に戻りましょう．カラビ-ヤウ多様体 X に対して，ホッジ数のポアンカレ多項式を母函数

$$\chi(X)(y,\bar{y}) := \sum_{p,q=0}^{d_X}(-1)^{p+q}h^{p,q}(X)y^p\bar{y}^q$$

で定義します．するとセール双対性によって，

$$\chi(X)(y,\bar{y}) = (y\bar{y})^{d_X}\chi(X)(y^{-1},\bar{y}^{-1})$$

が成り立ちます．また，ホッジ指数の分散について，$\chi(X) := \chi(X)(1,1)$ および $c_k(X)$ を第 k チャーン数とするとき，公式

$$\sum_{p,q=0}^{d_X}(-1)^{p+q}h^{p,q}(X)\left(p-\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{d_X}{12}\chi(X)+\frac{1}{6}\int_X c_1(X)\wedge c_{d_X-1}(X) \qquad (4)$$

が知られています(Libgober-Wood, Borisov)．

何か見たことのある数式ではありませんか？　カラビ-ヤウ多様体は $c_1(X)=0$ を満たしていました．特異点に対する分散の式(3)とカラビ-ヤウ多様体のホッジ指数の分散の公式(4)とは，対応 $p_i \leftrightarrow p$，$d_f \leftrightarrow d_X$，$\mu_f \leftrightarrow \chi(X)$ のもとで，きわめて類似していますね[1]．

このように，ホッジ数のレベルでは斉次超曲面特異点はカラビ-ヤウ多様体と非常に似た振る舞いをすることがわかります．問題なのは，A_l-型特異点の例で見たように，カラビ-ヤウ多様体の次元に対応するべき量 d_f やホッジ指数 p と解釈されるべき特異点の指数 p_i が一般には整数ではなく分数であるということです．

$f_5(x_1,\cdots,x_5) := x_1^5+\cdots+x_5^5$ とするとき，$f_5=0$ は $\mathbb{CP}^4$ の中でカラビ-ヤウ多様体 X_5 を定めます．一方で，$f_5=0$ は $\mathbb{C}^5$ における斉次超曲面特異点と考えることもできます．上で見たような類似性から，例えば，カラビ-ヤウ多様体 X_5 のホッジ数を多項式 f_5 から求めたりするなど，特異点とカラビ-ヤウ多様体の関係をもう少し精密にすることを考えたくなりますね．実際により精密に比較することは可能で，位相的ミラー対称性の観点からは，次の軌道体ポアンカレ多項式の概念に到達することになります．

5　軌道体ポアンカレ多項式

前の例で，X_5 を考えることと，$f_5=0$ を $\mathbb{C}^5$ における超曲面特異点と考えることに，どのような差があるかわかりますか？　それは，X_5 または

1)　これら指数の分散公式は，1章にあったビラソロ予想と関係して非常に重要です．また，斉次でない特異点に関しても指数を定めることができ，その分散に関する一般的予想とも関連しています．これらはともに非常に専門的な内容なのでここで触れることはできません．

$\mathbb{CP}^4$ を考えることは，$f_5 = 0$ または $\mathbb{C}^5$ に加えて，多項式や空間に作用している乗法群 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$（または $\mathbb{C}^*$）も同時に扱っているということです．つまり X_5 は特異点と群の組 $(f_5, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ とみなすことができます．このことをより具体的に見ていきましょう．

$GL(n, \mathbb{C})$ の有限アーベル部分群 G を考えます．とくに G の任意の元は $GL(n, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^n$ への自然な作用で $\mathrm{diag}(\boldsymbol{e}[\omega_1\alpha_1], \cdots, e[\omega_n\alpha_n])$ の形であらわされ，f を不変にする，という性質をもつとします．ここで，$\boldsymbol{e}[\cdot] := \exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)$，$\omega_i := \alpha_i/h$ および $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ とします．

これらの準備の下で，組 (f, G) に対して**軌道体ポアンカレ多項式**と呼ばれる不変量 $\chi(f, G)(y, \bar{y})$ を与えることができます（**Vafa の公式**）：

$$\chi(f, G)(y, \bar{y}) := \frac{(-1)^n}{|G|} \sum_{\alpha, \beta \in G} \prod_{\omega_i\alpha_i \notin \mathbb{Z}} (y\bar{y})^{\frac{1-2\omega_i}{2}} \left(\frac{y}{\bar{y}}\right)^{-\omega_i\alpha_i + [\omega_i\alpha_i] + \frac{1}{2}}$$

$$\times \prod_{\omega_i\alpha_i \in \mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left[\omega_i\beta_i + \frac{1}{2}\right] \frac{1 - \boldsymbol{e}[(1-\omega_i\beta_i)](y\bar{y})^{1-\omega_i}}{1 - \boldsymbol{e}[\omega_i\beta_i](y\bar{y})^{\omega_i}}.$$

ここで，$[\omega_i\alpha_i]$ は $\omega_i\alpha_i$ を越えない最大の整数をあらわします．$t = y\bar{y}$ とおいたとき，f と自明な群 $G = \{1\}$ の組に対する軌道体ポアンカレ多項式は

$$\chi(f, \{1\})(y, \bar{y}) = \chi(f, t)$$

となり，先に定義したポアンカレ多項式に一致します．

群作用付き超曲面特異点，つまり組 (f, G)，からさまざまな不変量を得ることを，物理では**ランダウ-ギンツブルグ軌道体模型**（**Landau-Ginzburg orbifold model**）と呼んで研究しています．歴史的には，このランダウ-ギンツブルグ軌道体模型の位相的ミラー対称性の研究から，カラビ-ヤウ多様体のミラー対称性の研究が発展しました．

6　特異点の位相的ミラー対称性

式(1)をポアンカレ多項式を用いて表現すると，

$$\chi(X)(y, \bar{y}) = (-1)^{d_Y} y^{d_Y} \chi(Y)(y^{-1}, \bar{y})$$

となります．なので，組 (f, G) と組 (f^*, G^*) が位相的ミラー対であることを，

$$\chi(f, G)(y, \bar{y}) = (-1)^{d_{f^*}} y^{d_{f^*}} \chi(f^*, G^*)(y^{-1}, \bar{y})$$

が成り立つこととして定義することができます．どのような組 (f, G) と

組 (f^*, G^*) が位相的ミラー対になるかを決定するのは，部分的に物理的なアイデアは知られているものの，一般的な形で数学的に証明するのは非常に難しい問題です．しかし位相的ミラー対をなす組 (f, G) と組 (f^*, G^*) の例は非常に多く見つかっていて，たくさんの応用があります．

再び多項式 $f_5(x_1, \cdots, x_5) = x_1^5 + \cdots + x_5^5$ を考えましょう．G を diag $(\boldsymbol{e}[\omega_1], \cdots, \boldsymbol{e}[\omega_n])$ で生成される $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$，$f_5^* := f_5, G^*$ を前節の条件を満たし単項式 $x_1 \cdots x_5$ を不変にする最大の有限アーベル群，とします．X_5 を $\{f_5 = 0\} \subset \mathbb{CP}^4$ で与えられるカラビ-ヤウ多様体，X_5^* を X_5 を群 G^*/G で割った空間のある極小特異点解消としたとき，

$$\chi(f, G)(y, \bar{y}) = \chi(X_5)(y, \bar{y})$$
$$\chi(f^*, G^*)(y, \bar{y}) = \chi(X_5^*)(y, \bar{y})$$

であり，とくに組 (f_5, G) と組 (f_5^*, G^*) は位相的ミラー対となります．これが有名な 5 次超曲面の位相的ミラー多様体の構成法です．同様の方法で，7555 個の位相的ミラー対をなす 3 次元カラビ-ヤウ超曲面が構成されました．

7　ミルナー・ファイバーの幾何学

これまでは位相的ミラー対称性に注目してきました．これからホモロジー的ミラー対称性に関連した話題を述べるために，超曲面特異点から得られる幾何学的不変量について，複素 2 次元の場合に簡単に触れます．

$f(x_1, x_2, x_3)$ を 2 次元孤立超曲面特異点とするとき，

$$f : \mathbb{C}^3 \backslash f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \{0\} \tag{5}$$

は位相的に局所自明なファイバー束となります．そこで，**ミルナー・ファイバー**と呼ばれる一般ファイバー $X_1 := f^{-1}(1)$ を考えると，X_1 は特異点をもたない複素多様体になります．X_1 は複素 2 次元（実 4 次元）なので，ポアンカレ双対性により**交叉形式**と呼ばれる対称双線型形式

$$I : H_2(X_1, \mathbb{Z}) \times H_2(X_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{6}$$

が存在します．ミルナーの定理により，$H_2(X_1, \mathbb{Z})$ は階数 μ_f の自由加群となり，その生成元として特異点に潰れる**消滅サイクル**と呼ばれる部分図形がとれる，ということが知られています．組 $(H_2(X_1, \mathbb{Z}), -I)$ は**ミルナー**

格子と呼ばれます．5章で $f = x^{l+1}$ として0次元球面[2]原点に潰れる様子を見たのを覚えていますか？ ここで述べたのはそれを少し一般化したものです．

また，式(5)により，群の表現

$$\rho : \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\}, *)(\cong \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(H_2(X_1, \mathbb{Z}), I)$$

が導かれます．$\mathbb{Z}$ の生成元1の表現 $c := \rho(1)$ のことを**ミルナー・モノドロミー**と呼びます[3]．消滅サイクルのなす集合を $\mathcal{R}$ と書くとき，4つ組 $(H_2(X_1, \mathbb{Z}), -I, \mathcal{R}, c)$ は，一般ルート系と呼ばれる古典ルート系の拡張概念である公理を満たします(齋藤恭司)．とくに，(A_l-型特異点を含む) ADE型と呼ばれる(重み付き)斉次孤立超曲面特異点から出発すると，一般ルート系として対応する型の古典ルート系が得られます．

8 特異点のホモロジー的ミラー対称性

$\mathbb{C}^3$ に標準的なシンプレクティック形式を入れたとき，それから導かれる X_1 上のシンプレクティック形式に関して．消滅サイクルたちは**ラグランジアン部分多様体**と呼ばれる特別な部分図形になるようにとれます．すると，ミルナー・ファイバー X_1 のラグランジアン部分多様体を対象とし，それらのフレアーホモロジーを射の空間とするような，f に付随する深谷圏 $D^bLag(f)$ が構成できる，と自然に期待されます．ただし，ミルナー・ファイバー X_1 がコンパクトでなかったり，対象のクラスをラグランジアン部分多様体からもう少し広くしたほうがよいとか，いくつか問題があるため，「f に付随する深谷圏 $D^bLag(f)$」と書いたものの，それを数学的に正確に定義することから難しい問題です．これらの問題点が解決されると，前節で与えた一般ルート系 $(H_2(X_1, \mathbb{Z}), -I, \mathcal{R}, c)$ は深谷圏 $D^bLag(f)$ の不変量として導かれます．

ホモロジー的ミラー対称性とは，シンプレクティック幾何学から定まる A_∞-圏(または三角圏)と複素幾何学から定まるそれとを入れ替える対称性のことです．これはカラビ-ヤウ多様体を越えて，非常に大きいクラスで成立する対称性であると期待されています．とくに，位相的ミラー対称性や古典的ミラー対称性は，より強いホモロジー的ミラー対称性から導かれるべき帰結だと考えられています．

群作用付き孤立特異点たちには位相的ミラー対称性

$$(f, \{1\}) \Longleftrightarrow (f^*, G^*)$$

が存在します[4]．したがって，位相的ミラー対称性がホモロジー的ミラー対称性に**圏化**されるのならば，**特異点 f に対して組 (f^*, G^*) が定まり，A_∞-圏を経由して代数的に定まる三角圏 $\mathcal{T}_{f^*,G^*}$ が構成できて，それが深谷圏 $D^bLag(f)$ と三角圏として同値になる**，と期待できます．これが特異点のホモロジー的ミラー対称性です[5]．より一般的には，(f, G) と (f^*, G^*) を位相的ミラー対とするとき，三角圏の同値

$$D^bLag(f, G) \cong \mathcal{T}_{f^*,G^*}$$

が期待され，これが一般の場合の特異点のホモロジー的ミラー対称性予想となります[6]．

一般ルート系 $(H_2(X_1, \mathbb{Z}), -I, \mathcal{R}, c)$ を用いてより具体的にいうと，次のような対応関係がホモロジー的ミラー対称性によって成り立つことが期待されます．

次ページの表の両側は，同じ数学的対象の異なる実現であると解釈できます．ミラー対称性の応用として，例えば有理曲線の数え上げなど，シンプレクティック幾何学の非常に難しい不変量を複素幾何の計算可能な量で研究するということが行われてきました．特異点の場合にも同様に，代数的に定まる三角圏 $\mathcal{T}_{f^*,G^*}$ を調べることで，きわめて超越的な対象である消滅サイクルの幾何学を調べることが可能になると思われます．

2）この例では，ω を 1 の原始 $l+1$ 乗根とするときに $[\omega^i]-[\omega^j]$ の形で書かれる 2 点があらわす図形．

3）$f = x^{l+1}$ の例では，ミルナー・モノドロミー c は 0 次元球面 $[\omega^i]-[\omega^j]$ を $[\omega^{i+1}]-[\omega^{j+1}]$ に写す変換．

4）ここで G^* は f^* を不変にする(5 節の条件を満たす) $GL(3, \mathbb{C})$ における最大の有限アーベル群とします．

5）特異点のホモロジー的ミラー対称性は一般の次元で期待できます．説明を簡単にするため引き続き 2 次元に限定しています．

6）もちろん，通常のホモロジー的ミラー対称性予想と同様に，「同値」という言葉が意味をもつように，両辺の圏を定義するところからがすでに問題(予想)の一部です．しかし，これを期待する数学的定理・背景・現象・根拠などがすでに 1980 年代の特異点論において発見されています．

シンプレクティック	複素
$(f, \{1\})$	(f^*, G^*)
$H_2(X_1, \mathbb{Z})$ 中間ホモロジー群	$K_0(\mathcal{T}_{f^*,G^*})$ グロタンディーク群
$-I$ I：交差形式	$\chi + {}^t\chi$ χ：オイラー形式
$\mathcal{R}$ 消滅サイクルの類	直既約な対象の類 $\in K_0(\mathcal{T}_{f^*,G^*})$
c ミルナー・モノドロミー	$-[S] \in \mathrm{Aut}(K_0(\mathcal{T}_{f^*,G^*}))$ (S：セール函手)

9　非可換幾何学の登場とルート系の実現

$\mathcal{T}_{f^*,G^*}$ はどのように定義されるかを，少し背景も含めて説明しましょう．組 $\mathcal{A}_{f^*} := (\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3], f^*)$ はただ 1 つの対象からなる A_∞-圏(A_∞-代数)とみなすことができます．このことを標語的に言うと，可換な特異点を非可換環 $\mathcal{A}_{f^*}$ を函数環としてもつ非可換空間として見直す，ということです．そして $\mathcal{A}_{f^*}$ 上の $\widehat{G^*}$-同変な右 $\mathcal{A}_\infty$-加群のなす三角圏

$$\mathcal{T}'_{f^*,G^*} := D_{\widehat{G^*}}(\mathrm{Mod}-\mathcal{A}_{f^*})$$

を考えます．ここで，$\widehat{G^*}$ は群 G^* の $\mathbb{Z}$ による拡大で，多項式 f^* が $\mathbb{C}^*$-作用をもつことに起源があります．

この圏 $\mathcal{T}_{f^*,G^*}$ は，代数多様体 X に群 G が作用しているときの，G-同変な準連接層(quasi-coherent sheaf)の複体のなす導来圏 $D_G(\mathrm{Qcoh}\, X)$ のアナロジーです．X が滑らかであって，X/G が標準束を保つ特異点解消[7] Y を持つとすると，$D_G(\mathrm{Qcoh}\, X)$ のコンパクトな対象[8] 全体のなす充満部分三角圏は，G-同変な連接層の有界複体のなす導来圏 $D^b_G(\mathrm{coh}\, X)$ と同値になり，とくに

$$D^b_G(\mathrm{coh}\, X) \cong D^b(\mathrm{coh}\, Y)$$

です．10 章にあったように，連接層の有界導来圏 $D^b(\mathrm{coh}\, Y)$ は複素幾何学側における D-**ブレーンの圏**と考えられるもので，ミラー対称性でシンプレクティック幾何学側の深谷圏と同値になるべきものです．具体例を 1 つ

挙げておきましょう．6節で登場した$\mathbb{CP}^4$の5次超曲面X_5とその位相的ミラー多様体X_5^*に対して，

$$D^b_{G^*/G_0}(\mathrm{coh}\,X_5) \cong D^b(\mathrm{coh}\,X_5^*)$$

が成り立ちます．これは6節の位相的ミラー対の構成を圏化したものと考えられ，とくにポアンカレ多項式の等式はこの三角圏の同値から導くことができます．

いま考えている特異点つまり非可換空間$\mathscr{A}_{f^*}$は「非可換カラビ-ヤウ多様体」といえる非常に素性がよい性質を持ち，「商空間$\mathscr{A}_{f^*}/G^*$は標準束を保つ非可換特異点解消をもつ」と考えられます．可換な場合のアナロジーに基づくと，$\mathcal{T}'_{f^*,G^*}$のコンパクトな対象全体のなす充満部分三角圏が求める三角圏$\mathcal{T}_{f^*,G^*}$であって，$\mathcal{T}_{f^*,G^*}$はA_∞-圏$\mathscr{A}_{f^*}$の$\widehat{G^*}$-同変な導来圏$D_{\widehat{G^*}}(\mathscr{A}_{f^*})$と同値である，と考えられます．驚くべきことは，この三角圏$D_{\widehat{G^*}}(\mathscr{A}_{f^*})$は，1980年代中ごろに特異点や極大コーエン-マコーレー加群の研究において導入された，群作用付き行列因子化のなす三角圏に一致することです．

シンプレクティック幾何側，消滅サイクルの幾何側では，ルート格子$(H_2(X_1,\mathbb{Z}),-I)$の「良い基底」となる，消滅サイクルの**格別な基底**(**distinguished basis**)が取れることが知られています．これの圏論的対応物はexceptional collectionと呼ばれる三角圏の対象の列$(\mathscr{E}_1,\cdots,\mathscr{E}_\mu)$です．良いクラスの斉次特異点$f$に対しては$D_{\widehat{G^*}}(\mathscr{A}_{f^*})$がexceptional collectionで生成されることを示すことができて，とくに，グロタンディーク群$K_0(\mathcal{T}_{f^*,G^*})$の良い基底が取れることがわかります．

さらに$\mathscr{E}_i$たちの間に0次以外のすべての拡大群が消えていると，自己準同型代数$E := \mathrm{End}(\mathscr{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathscr{E}_\mu)$は非可換有限次元代数で，とくにある箙(えびら)の経路代数を関係式で割ったものになります．そして有限生成右E-加群の導来圏$D^b(\mathrm{mod}-E)$は$D_{\widehat{G^*}}(\mathscr{A}_{f^*})$と三角圏として同値となるので，特異点$f$のミラー多様体は，函数環が$E$であるような「非可換多様体」となります．また，位相的ミラー対称性から期待されるように，これは「分数次元d_fをもつ非可換カラビ-ヤウ多様体」となることもわかります．

7) したがって，第1チャーン類$c_1(Y)=c_1(X/G)=0$であるような特異点解消．

8) 対応する余表現可能函手が無限直和と可換となる対象．

例えば，f を ADE 型の特異点とすると，E は対応する型のディンキン図形に適当に向きをつけて得られるディンキン箙の経路代数となります．これにより，三角圏 $\mathcal{T}_{f^*,G^*}$ からグロタンディーク群を経由して，古典ルート系を得ることができ，特異点に対してもホモロジー的ミラー対称性が存在する根拠を与えます．

10 おわりに

5 章とこの章の解説で雰囲気を伝えたかったのは，**カラビ-ヤウ多様体・特異点・ルート系・平坦構造・量子コホモロジーといった一見異なる対象間にある不思議な関連性**です．特異点の圏(Buchweitz, Orlov)と行列因子化の圏との同値性，Bridgeland-Douglas の Π-安定性と周期写像，$\mathcal{T}_{f,\{1\}}$ の「A_∞-変形」による超曲面特異点の平坦構造の導出などなど，残念ながら省略した興味深い話題がありますが，それはまたの機会に解説できればと思います．

［たかはし　あつし］

12 ミラー対称性を越えて

中島 啓
[京都大学数理解析研究所]

ミラー対称性の御利益のひとつに，有理曲線の数え上げという難しい問題を，ミラーとなる別の多様体の変形という(比較的)やさしい問題におきかえて解くことができるというものがありました．この章では，「ミラー対称性を越えて」と題して，グロモフ-ウィッテン不変量を計算する問題についての，最近の著しい進歩についてご紹介したいと思います．有理曲線の数え上げの問題は，グロモフ-ウィッテン不変量の種数0の場合にあたり，ここでは種数が高い場合も扱います．また，数学的にはあまり関係のありそうもない結び目理論や表現論やいろいろな分野が，物理の弦理論の双対性によってつながっているという面白い構図が現れており，シンプレクティック幾何と代数幾何の間の双対性と考えることができるミラー対称性を，さらに深化させたものともいえるものです．

アンドレイ・オクンコフ(Andrei Okounkov)が，ICM 2006 でフィールズ賞を授賞したのは記憶に新しいですが，授賞理由のひとつにあったグロモフ-ウィッテン不変量に関する一連の研究も，一部分がここに係わっています．

1 グロモフ-ウィッテン不変量の母関数

2章(18 ページ)に，グロモフ-ウィッテン不変量の説明がありました．簡単に復習します．$\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$ に対し，種数 g のリーマン面 C から X への(安定)正則曲線のなすモジュライ空間を $\bar{M}_g(X,\beta)$ と表します．このとき，グロモフ-ウィッテン不変量は，X のコホモロジー類を引き戻して得られるコホモロジー類を，$\bar{M}_g(X,\beta)$ 上で積分して定義されるのでした．より正確には，普通の単なる積分ではなく，仮想的基本類と呼ばれる $[\bar{M}_g(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}$ というホモロジー類の元とのペアリングを取ります．これは，

$\bar{M}_g(X,\beta)$ が特異点を持つために，'正しい'積分を定めるために導入されたものですが，ここでは深入りしないことにします．

ここで，さらに X を3次元のカラビ-ヤウ多様体とします．ヒルツェブルフ-リーマン-ロッホの定理を適用すると，$\bar{M}_g(X,\beta)$ の(仮想)次元は，g や β によらずに常に0であるという性質が得られます．したがって，グロモフ-ウィッテン不変量 $N_{g,\beta}$ が

$$N_{g,\beta}=\int_{[\bar{M}_g(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}}1$$

と，定義されます．$\bar{M}_g(X,\beta)$ の(仮想)次元が0であるというのは，顕著な性質で，もしも次元が3でなかったり，カラビ-ヤウ多様体でなかったりすると，特別な β を取ったり，X のコホモロジー類を考えたりしないと，微分形式の次数と次元が合わなくなって，上の式は自明に0になってしまいます．そういった意味で，グロモフ-ウィッテン不変量と，X が3次元のカラビ-ヤウ多様体であることは非常に相性がよく，そのためグロモフ-ウィッテン不変量に関していろいろと深い結果があります．この章の話も3次元のカラビ-ヤウ多様体のグロモフ-ウィッテン不変量に関するものですが，最初に述べたように，すべての種数 g について調べます．そこで，すべての β, g に対するグロモフ-ウィッテン不変量 $N_{g,\beta}$ の母関数を

$$F_{GW}(X\,;\hbar,\Lambda)=\sum_{\beta}\sum_{g}N_{g,\beta}\hbar^{2g-2}\Lambda^{\beta} \tag{1}$$

と表します．$\Lambda, \hbar$ は，それぞれ母関数において，正則写像の次数と定義域のリーマン面の種数に対応する変数です．

通常，幾何学者は，リーマン面は種数が大きくなればなるほど複雑になり難しいと考えています．また，種数が異なるところは別々に取り扱い，したがって，種数に関して母関数を取るという発想は普通はありません．ところが，この章で紹介するのは，種数に関して母関数を取ると他の構造が見えてくる，という主張ばかりです．そういう意味で，リーマン面の種数を全部動かしたものに何らかの幾何学的な構造があるという，母空間が顔を見せています．これは，弦理論はファインマン・グラフを太らせると見えてくるという物理的な洞察(図1)とよくマッチしています．ファインマン・グラフは，本来はおおもとの理論があって，それをパラメータについて摂動展開するときに，現れるものです．ただし現時点では，弦理論が摂動展開として見えるおおもとの理論が何なのかは，まだよく分かってい

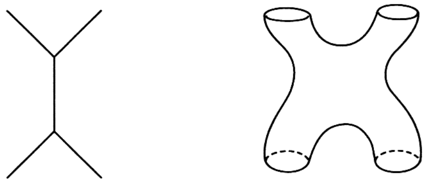


図1　ファインマン・グラフ(左)と弦(右)

ませんので，むしろそういったものを見つけることを目指す，といった方がいいかと思います.

2　局所的ミラー対称性

1章(15ページ)で,「局所的ミラー対称性」が少し紹介されました. これは，コンパクトでないカラビ-ヤウ多様体のグロモフ-ウィッテン不変量を計算する研究です. 一番基本的なものが，コニフォールドの特異点解消(resolved conifold)と呼ばれているもので，$\mathbb{P}^1$ 上の第一チャーン類が -1 の直線束 $\mathcal{O}(-1)$ の二つの直和 $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)$ の全空間を考えたものです. コニフォールドの特異点解消が，よく研究されている理由は，コンパクトなカラビ-ヤウ多様体に $\mathbb{P}^1$ が‘動かない形’で入っているときに，その近傍がこの空間と同じになるからです. 動かないということは，法束が正則切断を持たないということで，$\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)$ というチャーン類が選ばれるのは，その反映です. たとえば，グロモフ-ウィッテン不変量の多重被覆公式は，この空間のグロモフ-ウィッテン不変量を表す公式で，ファーバー-パンドハリパンデによって証明されましたが，一般のコンパクトなカラビ-ヤウ多様体に $\mathbb{P}^1$ が‘動かない形’で入っているときにも，その $\mathbb{P}^1$ から同じ公式であたえられる寄与がグロモフ-ウィッテン不変量にある，と考えられています. 公式の具体形は，

$$\sum_{g\geq 0}\frac{(-1)^{g-1}B_{2g}}{2g(2g-2)!}\sum_{d=1}^{\infty}d^{2g-3}\Lambda^d\hbar^{2g-2} \qquad (2)$$

というものです. $\Lambda, \hbar$ は(1)と同じもので，それぞれ母関数において，正則写像の次数と定義域のリーマン面の種数に対応する変数です. $\hbar^{-2}$ の項が S^2 からの正則写像，$\hbar^0$ の項がトーラスからの正則写像となっています.

ただし，いまの場合は$\mathbb{P}^1$への写像と思っていいので次数は，整数と考えました．また，B_{2g}はベルヌーイ数と呼ばれる数で，

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n$$

であたえられます．($B_0=1$, $B_1=-1/2$, $B_2=1/6$, で，$g\geqq 1$のときは$B_{2g+1}=0$.)　この数は，たとえばヒルツェブルフのリーマン-ロッホ公式にも現れます．それと関係があるかどうかはよくわかっていませんが，あとで説明する幾何工学からは自然であることが分かります．

このほかにも，$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$の標準束の全空間や，$\mathbb{P}^2$の標準束の全空間など，コンパクトな多様体上のベクトル束の全空間も例です．あとの幾何工学では，$\mathbb{P}^1$上のALE空間($\mathbb{C}^2/T$の特異点解消)をファイバーとするファイバー束などの例が現れます．

これらの非コンパクトなカラビ-ヤウ多様体のグロモフ-ウィッテン不変量を計算するときに使われる有効な道具が，トーラスの作用に関するアティヤ-ボットの不動点公式です．一般には，正則曲線のモジュライ空間はよくわからない空間で，その上でコホモロジー類の計算を実行するのは難しいと思われるのですが，トーラスの作用がモジュライ空間にあるので，積分が固定点に'集中'し，計算がずっとやさしくなります．この手法は，有名な4次元射影空間$\mathbb{P}^4$の中の5次超曲面内の有理曲線の数え上げでも用いられました．非コンパクトなカラビ-ヤウ多様体の場合は，さらに計算が進められ，位相的頂点(topological vertex)の理論に結実しました．位相的頂点は大変面白い話なのですが，ここでは紙幅の関係で残念ながら省略します．

3　ラージN相対性

グロモフ-ウィッテン不変量や，それ以前に定義されていたドナルドソン不変量は，モジュライ空間の幾何学と関連して活発に研究されています．一方，それらとはやや毛色が異なりますが，やはり活発に研究されている不変量として，チャーン-サイモンズ理論に基づく結び目不変量と呼ばれるものがあります．この不変量にはいろいろなバージョンがあるのですが，一番最初のものは結び目理論とはなんの関係もなかった作用素環の専門家

ジョーンズが発見した不変量で，**ジョーンズ不変量**と呼ばれています．その後,「ジョーンズ不変量を場の理論を用いて解釈せよ」というアティヤの問題に対して，理論物理学者のウィッテンがチャーン-サイモンズ汎関数を，接続の全体のなす無限次元空間の上で経路積分することによって定義できる，と答えました．そして，3次元多様体の中の結び目に関するジョーンズ-ウィッテン不変量として，より大きな枠組の中で定式化されました．この理論についてはいろいろと面白いお話がありますが，興味があるかたは『量子不変量——3次元トポロジーと数理物理の遭遇』(大槻知忠編，日本評論社)を見ていただくこととして，グロモフ-ウィッテン不変量とは毛色が違うということを強調しておきます．理由は，グロモフ-ウィッテン不変量がモジュライ空間上の積分として定義される不変量であるのに対し，ジョーンズ-ウィッテン不変量は接続の全体のなす無限次元空間の上の経路積分として定義される不変量であるからです．前者は，モジュライ空間というよくわからない空間の上の積分ですが，あくまで有限次元の多様体上の積分で，数学的に厳密に定義することができます．一方で後者は，経路積分という数学的には基礎付けのないものに基づいています．

実際，ジョーンズ-ウィッテン不変量の数学的に厳密な定義は，レシェティキン-トラーエフと河野俊丈によりなされましたが，積分を実際に実行するのではなく，間接的な手法によって与えられました．ウィッテンは，経路積分が定義できていて有限次元の積分と同じような性質を持つという仮説のもとに，不変量を計算をするアルゴリズムを導出したのですが，このアルゴリズムを定義として採用し，計算の仕方によらずに答えがいつも同じになるということを証明することによって，定義を与えたのです．

ラージ N 相対性は，これら二つの毛色の異なる，結び目不変量とグロモフ-ウィッテン不変量が関係することを主張するもので，物理学者のゴパクマール-ヴァファによって1998年に発見されました．ここで N はチャーン-サイモンズ汎関数を考える接続が定義されている主束の構造群が $U(N)$ であることを表し，すべての N について同時に考えます．アイデアとしては，1974年の $U(N)$ ゲージ理論の $N\to\infty$ の極限が，弦理論と等価であるというトフーフトの主張に基づいています．

3次元多様体として，一番簡単な S^3 を取り，結び目が何もない空集合の場合(このようなものも許されている)のジョーンズ-ウィッテン不変量を

考えます．構造群としては$U(N)$を採用し，正の整数k（レベルと呼ばれる）を与えます．このときジョーンズ-ウィッテン不変量が(1)の母関数のexpを取ったものと等しいというのが，ゴパクマール-ヴァファの結果です．ただし，Nとkを変数と見て，グロモフ-ウィッテン不変量の母関数(1)に出てくる変数を

$$\hbar = \frac{2\pi}{k+N}, \qquad \Lambda = \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}N}{k+N}\right)$$

と読み替えて，不変量が等しいと主張します．この主張自体は，両方の不変量が共に数学的に厳密な形で定義されるので，両方を計算して等しいと観察すれば確かめられるものです．しかし，なぜそのようなことが成り立つのか，という物理的な説明に驚嘆すべきアイデアが含まれており，これは数学的に厳密には正当化されておりません．

アイデアを説明します．まず，なぜ実3次元の多様体のS^3と複素3次元の多様体のコニフォールドの特異点解消の間に関係があるか，ということですが，1992年のウィッテンの「チャーン-サイモンズ理論は弦理論である」という主張に基づきます．S^3の余接束$X = T^*S^3$は複素構造を持ちますが，これを非コンパクトなカラビ-ヤウ多様体と考えます．このとき

1. S^3のジョーンズ-ウィッテン不変量
2. 境界つきリーマン面からのT^*S^3への正則写像からできるグロモフ-ウィッテン不変量

が等しいというのがウィッテンの主張です．通常のグロモフ-ウィッテン不変量は，境界を持たないリーマン面からの正則写像のモジュライ空間$\bar{M}_g(X,\beta)$上の積分として定義されました．これを，定義域のリーマン面としては境界を持つものも許し，正則写像として境界をS^3の中に入れるものの全体を集めてモジュライ空間を作り，同様の積分で不変量を定義します．ただし，高い次数を持つ境界つきリーマン面からの正則写像に基づくグロモフ-ウィッテン不変量の定義には，技術的に微妙な問題があるそうで[1]，数学的に厳密な定義は与えられていないものです．さらに，今の場合に単純に正則写像を考えると定数写像しかなく，不変量をどのように定義するのか慎重な考察が必要です．

次に T^*S^3 とコニフォールドの特異点解消をつなげます．これは 3 次元カラビ–ヤウ多様体でよくある手法で，4 章で並河氏が説明されたコニフォールド・トランジションです．説明の繰り返しになりますが，いまの場合は，具体的にできます．まずコニフォールドは，$\mathbb{C}^4$ の中の $\{xy = uv\}$ で定義される原点に特異点を持つ超平面です．これを $xy = uv - \mu$ とパラメータ μ によって変形すると，T^*S^3 に微分同相であることが簡単にわかります．一方，特異点解消として 2 節の最初に述べた $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ が取れます．実際，そこからコニフォールドへの写像は

$$\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \ni ([z_0 : z_1], \xi, \zeta) \mapsto (x, y, u, v) = (\xi z_0, \zeta z_1, \zeta z_0, \xi z_1)$$

で与えられます．ただし，$[z_0 : z_1]$ は底空間の射影直線の座標で，ξ，ζ が直線束 $\mathcal{O}(-1)$ のファイバーの座標です．

ゴパクマール–ヴァファは，コニフォールド・トランジションを通じて，先の 2 の不変量と

3. 境界のないリーマン面からコニフォールドの特異点解消へのグロモフ–ウィッテン不変量

が等しいと洞察しました．2 節で述べたように 3 は数学的に厳密に定義される，という点が 2 の不変量が数学的な定義にまだあいまいさが残っていることと大きく違うことに注意しましょう．したがって，1 の不変量と 3 の不変量が等しいという主張は，数学的に意味があるものです．そして，その主張は両方を計算してみればたしかに正しいわけです．

このゴパクマール–ヴァファの発見は，大栗–ヴァファによって深化されました．今までの考察は，結び目がない場合の S^3 のジョーンズ–ウィッテン不変量でしたが，結び目(絡み目) L がある場合に次のように拡張されました．まず，1 の不変量は，もとから L がある場合に定義されています．2 の不変量は

2′. 境界つきリーマン面からの T^*S^3 への正則写像で，境界が S^3 と L の余法束に入っている正則写像からできるグロモフ–ウィッテン不変量

1） これは深谷賢治氏，小野薫氏から教えていただきました．

で置き換えられます．そして，コニフォールド・トランジションを通じて L の余法束が，コニフォールドの特異点解消の中のラグランジアン部分多様体 $\mathcal{L}_L$ を定めると予測します．L の余法束は，T^*S^3 の中のラグランジアン部分多様体ですが，何らかの意味で自然な仕方でコニフォールド・トランジションしたあとにも移るということです．そこで3の代りに

3′. 境界つきリーマン面からのコニフォールドの特異点解消への正則写像で，境界が $\mathcal{L}_L$ に入っている正則写像からできるグロモフ-ウィッテン不変量

を考えると，それが2′の不変量，したがって絡み目 L のジョーンズ-ウィッテン不変量とも等しいと主張します．この予想は，境界つきリーマン面からの正則写像を考えている点と，$\mathcal{L}_L$ の定義がはっきりしていないという点で，数学的に厳密に検証可能な予想とはなっていませんが，特別な絡み目については，いかにももっともらしい $\mathcal{L}_L$ の定義と，トーラス作用を使ったグロモフ-ウィッテン不変量の定義のもとで，計算が行われて検証されています．

4 幾何工学——geometric engineering

前の節では，グロモフ-ウィッテン不変量と実3次元の位相不変量をつなぐことができました．この節ではカッツ-クレム-ヴァファによる**幾何工学**によって，実4次元多様体 Y のヤン-ミルズ・ゲージ理論の不変量とつなげます．つまり，Y 上の反自己双対接続のモジュライ空間 $M(Y)$ を考え，その上のコホモロジー類を積分することによって不変量を定義します．ドナルドソン不変量はこのようにして定義されますが，幾何工学でグロモフ-ウィッテン不変量とドナルドソン不変量をつなげるためには，二段階が必要で，まずネクラソフの分配関数とグロモフ-ウィッテン不変量をつなげ，そののちに前者とドナルドソン不変量をつなげます．二段階目は，1994年にウィッテンによって発見されたことから始まり，ネクラソフの予想を通じて，筆者が最近ゲッチェ，吉岡康太と研究していることなのですが，そちらについては省略します．ネクラソフの分配関数では，一般の4

次元多様体ではなく，4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 上の反自己双対接続のモジュライ空間を考え，その上での積分で定義されます．一言でいいきってしまうと，ネクラソフの分配関数は，$\mathbb{R}^4$ の S^1 作用に関する同変ドナルドソン不変量です．

一般のゲージ理論と関係をつける前に，まず構造群が $U(1)$ のときを考えます．ただし，普通の $U(1)$-束だけしか考えないと，(単連結であれば)特性類だけで反自己双対接続が決まってしまいますので，あまりに簡単になってしまってうまくいかないので，有限個の特異点を持つような'$U(1)$-束'を考えます．そうすると特異点の配置だけが重要で，モジュライ空間としては，$\mathbb{R}^4$ の対称積 $S^n\mathbb{R}^4=(\mathbb{R}^4)^n/S_n$ が現れます(S_n は n 対称群)．この空間はコンパクトではないので，この上で積分をすることには注意が必要ですが，今の場合は天下り的に次のように考えます．まず，コホモロジー類の積分ではなく，K 理論としての積分，すなわちディラック作用素の指数を考えることにします．前者は後者でパラメータを特殊化したものとして得られることが分かっており，グロモフ-ウィッテン不変量と直接つながっているのは後者なので，K 理論版の方を採用します．ディラック作用素は無限次元の核をもつため単純な意味では指数は考えられないので，$\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{C}^2$ と思って，S^1 作用

$$e^{\hbar}\cdot(z_1,z_2)=(e^{\hbar}z_1,e^{-\hbar}z_2) \qquad (\hbar\in\mathbb{R})$$

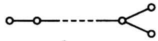
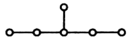
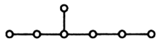
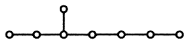
を取り，S^1-同変指数を考えます．各ウェイト空間は有限次元になるので，その母関数として S^1-同変指数は意味を持ちます．これの答えを求めるのは対称積が簡単な空間なのでそんなに難しくはなく，

$$\exp\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\Lambda^d}{d(1-e^{i\hbar d})(1-e^{-i\hbar d})}\right) \tag{3}$$

です．ベルヌーイ数の定義において $1/(e^t-1)$ を微分してみれば，この式の log を取ったものが，式(2)を $\hbar$ について展開したものと等しいことがただちに分かります．exp を取ることは，グロモフ-ウィッテン不変量の立場では，定義域のリーマン面が連結とは限らないものを考えることに対応します．また，ドナルドソン不変量は，S^1 作用を忘れて得られるものなので，$\hbar$ 展開の初項に対応し，グロモフ-ウィッテン不変量の立場では，種数が 0，すなわち S^2 からの正則曲線に対応すると考えられています．

なぜ，コニフォールドの特異点解消のグロモフ-ウィッテン不変量と対

表1　ディンキン図式と $SL_2(\mathbb{C})$ の有限部分群

A_n 型		巡回群　$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$　$(n \geqq 1)$
D_n 型		二項二面体群　位数 $= 4(n-1)$　$(n \geqq 4)$
E_6 型		二項四面体群
E_7 型		二項八面体群
E_8 型		二項二十面体群

称積のディラック作用素の同変指数が一致しているのか，非常に不思議ですが，幾何工学の真の主張は，構造群 G が $U(1)$ とは限らない場合のものです．まず，4 次元ヤン-ミルズ理論の側は，ネクラソフの分配関数とします．すなわち，対称積 $S^n\mathbb{R}^4$ を G-半自己双対接続のモジュライ空間に置き換えて，同様にディラック作用素の同変指数を考えます．一方，グロモフ-ウィッテン不変量を考える非コンパクトなカラビ-ヤウ多様体は，コニフォールドを別のもので置き換えます．以下説明するようにカラビ-ヤウ多様体には構造群 G が影も形も現れません．何もないところから，G を'作る'ところが一番不思議なところで，それが'工学'と名付けられている理由だと思います．

まずコンパクト・リー群 G がディンキン図式と呼ばれている図式(表 1 参照)で分類されていることを思い出します．5 章で出てきたルート系もこれと関連しています．たとえば $SU(N)$ は，A_{N-1} 型のディンキン図式と対応します．

一方で，$SL_2(\mathbb{C})$ の有限部分群もディンキン図式と対応することがコクセターによって古くから知られていました．Γ を $SL_2(\mathbb{C})$ の有限部分群としたとき，$\mathbb{C}^2/\Gamma$ の原点における特異点を特異点解消したときに現れる例外集合の既約成分の交わりかたの様子を表すと，ディンキン図式となる，というものでした．(表 1 の右側参照)　このように，有限群 Γ とコンパクト・リー群 G の対応が，分類を通じてついていたのは昔からよく知られていたことでしたが，幾何工学ではこれを族の上で行います．最初にでてきたコニフォールドの特異点解消 $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)$ の各ファイバーは，$\mathbb{C}^2$ ですから，ここに上と同様に Γ を作用させ，商空間 $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)/\Gamma$ を取ります．この空間の特異点解消が，求めるカラビ-ヤウ空間です．

5 ドナルドソン-トーマス不変量

次にグロモフ-ウィッテン不変量とドナルドソン-トーマス不変量をつなげます．この場合は，カラビ-ヤウ多様体は一つでいいので，今までに紹介してきた不変量の間の等式よりもある意味簡単ですし，またミラー対称性よりも簡単ともいえます．ただしあとで述べるように二つの不変量を結ぶためには，母関数を作るときに使う変数を解析接続する必要があり，この部分は非常に難しいと考えられています．

まず，ドナルドソン-トーマス不変量というのがどんなものなのか，おおざっぱに説明します．正確な定義を勉強するには，いまのところ原論文にあたるしかないと思います．

グロモフ-ウィッテン不変量は，リーマン面 Σ から X への正則写像の'個数'を数えていました．ここで，学部の多様体論の講義で習う大切な事実を思い出しましょう．X の中の部分多様体 Σ (より正確には正規部分多様体)の定義のしかたには，次の二通りがあるというものです．

1) ある多様体 S からの，微分がいたるところ単射であるような埋め込み写像 $i: S \to X$ の像 $\Sigma = i(S)$ である．
2) いくつかの関数(正確には局所的に定義された関数) $f_1, \cdots, f_r$ の共通零点 $\Sigma = f_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap f_r^{-1}(0)$ である．

もっと簡単な例でいうと，$\mathbb{R}^3$ の中の曲面を与えるのに，その曲面をパラメータ表示し，

$$\Sigma = \{x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

と書くか，ある関数 f を与えて $\Sigma = f^{-1}(0)$ と書くか，二通りの方法があるというものです．そして逆関数定理の応用として，像に特異点がない状況では，片一方のやりかたで Σ を与えると，自動的にもう一方のやりかたでも与えることができることが保証されます．(ただし一般的には具体的に式がかけるとは限らない．)

グロモフ-ウィッテン不変量の定義は，1)のパラメータ表示を用いたものです．なぜなら，定義域の Σ を固定して，σ から X への正則写像の個数

を数えているからです．一方，2)の捉えかたを考えます．すなわち正則写像の像を関数の共通零点として与えられると考えます．‘正則’であることから，像は複素部分多様体であり，正則関数の共通零点になります．そこで，正則写像の個数を数える代わりに，正則関数の共通零点の個数を数えよう，というわけです．ただし複素部分多様体 Σ を一つ固定したときに，Σ を共通零点とするような正則関数の族の与えかたはいろいろとありうるので，代数幾何で複素部分多様体を考えるときの標準的なやりかたを採用します．すなわち，$f_1, \cdots, f_r$ を考える代わりに，それらから生成されるイデアルを考えます．つまり複素部分多様体 Σ と，X 上の(正確には局所的に定義された)正則関数の全体 $\mathcal{O}_X$ の中のイデアル I を

$$I = \{f \in \mathcal{O}_X \mid f|_\Sigma = 0\}$$

というやりかたで対応させます．逆に，イデアル I から，そこに属するすべての関数が消える点の集合

$$\Sigma = \{x \in X \mid \text{すべての } f \in I \text{ について } f(x) = 0\}$$

として Σ が再現されます．ただし一般のイデアルに対する集合は，特異点をもつことがありますので注意が必要です．

このようにして，σ から X への正則写像の個数を数えるグロモフ–ウィッテン不変量の代わりに，X 上の正則関数の全体の中のイデアルの全体を数えることが考えられます．後者がドナルドソン–トーマス不変量(の特別な場合)にほかなりません．グロモフ–ウィッテン不変量の場合は，定義域のリーマン面の種数 g と写像の次数 $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ に関して母関数を取りました．イデアル I に対しては，種数の代わりにオイラー標数 $\chi(\mathcal{O}_X/I)$ を取ります．もしも正則写像 $f : C \to X$ が埋め込みであって，I が $f(C)$ に対応するイデアルであるとすると，$\chi(\mathcal{O}_X/I) = 1-g$ となります．そこで $n = \chi(\mathcal{O}_X/I)$ と $\beta = [\mathcal{O}_X/I]$ を固定したイデアルのモジュライ空間を $I_n(X, \beta)$ で表し，ドナルドソン–トーマス不変量の母関数として

$$Z_{DT}(X\,;q,\Lambda) = \sum_\beta \sum_n q^n \Lambda^\beta \int_{[I_n(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}} 1 \qquad (4)$$

を考えます．このとき，式(1)の $\exp F_{GW}(X\,;\hbar,\Lambda)$ が $Z_{DT}(X\,;q,\Lambda)$ と $q = -e^{i\hbar}$ という対応で等しい，というのが，モーリク–ネクラソフ–オクンコフ–パンドハリパンデの予想です．正確には，次数が 0 の部分をのぞく必要がありますが，ここではその説明は省略しますので，興味あるかたは

原論文を見てください．また，式(3)を見直してください．たしかに変数 $q=-e^{i\hbar}$ が式に見えています．

部分多様体の，パラメータ表示と関数の共通零点の間の関係を考えると，グロモフ-ウィッテン不変量とドナルドソン-トーマス不変量に関係がありそうだというのは納得がいくかと思うのですが，実際には積分をするときにもモジュライ空間のコンパクト化をする必要があり，その場合には対応がないので，コンパクト化されたモジュライ空間はだいぶ違います．また，$q=-e^{i\hbar}$ という変数変換の意味を考えてみると，いくつかの不思議な主張を含んでいることが見えてきます．たとえば，式(1)は $\hbar\mapsto-\hbar$ で不変です．もしも予想が正しければ，式(4)は $q\mapsto 1/q$ という変数変換で不変であるということになります．式(4)を見る限りではなぜそんなことが成り立つのか分かりません．また，もともと式(1)で $\hbar$ は母関数を取るときの不定元ですから $\hbar$ は0に近いと考えるのが自然で，一方で式(4)では q が0に近いと考えるのが自然です．ですから，$q=-e^{i\hbar}$ は変数が自然に定義されている場所が違うところを結び付けています．したがって予想は，展開の係数ごとに等しいことをチェックするといったやりかたでは，証明できません．もともとがモジュライ空間に基づく不変量ですので，モジュライ空間の間の関係として理解しようとするのは自然ですが，解析接続を行っている部分は幾何には乗りませんので行き詰まってしまいます．この意味で，グロモフ-ウィッテン不変量 = ドナルドソン-トーマス不変量という主張は，大変深いことを主張していると考えられています．同様に，自然な定義域が異なる二つの母関数の間の解析接続を通じた等式は，S-**双対性**と言われ，ミラー対称性よりも深いと考えられています．

6 ドナルドソン-トーマス不変量の壁越え公式

2008年に，ドナルドソン-トーマス不変量の研究に新展開がありました．最後に，これを簡単に紹介したいと思います．

10章で説明されたように，ミラー対称性の立場では，X の上の連接層の圏よりも，その導来圏 $D(X)$ が自然であると考えられています．そのような立場から，ドナルドソン-トーマス不変量の定義をもう一回見直すと，イデアル層のモジュライ空間 $I_n(X,\beta)$ を，導来圏の対象をパラメトライズす

るモジュライ空間に一般化した方が自然であると考えられます．

このときに問題になるのが，モジュライ空間を定義するときに，位相的なデータ n, β は固定するにしても，すべての対象を考えていたのでは，きれいな空間になるのが期待できないことです．この問題点は，代数幾何の幾何学的不変式論とよばれる分野が作られた動機で，結論からいうと，安定とよばれる条件を満たす対象だけを取り出して，モジュライ空間を作る必要があります．安定性の条件は，技術的なものなので説明しにくいですが，イデアル層のときは，$\mathcal{O}_X$ への写像が単射であるということから，自動的に成立する条件です．また，開な条件なので，安定な対象を少し変形して得られるような対象は，ふたたび安定になります．

また，導来圏 $D(X)$ の対象を考える前から，連接層のモジュライ空間を構成する際によく知られていたことですが，安定性の条件を定めるためには，多様体 X 上の豊富な直線束，もしくはケーラー計量を選ぶ必要があり，一般には，それを取り替えると，安定なものが安定でなくなることがあり，したがってモジュライ空間も変わります．

さらに，直線束，もしくは計量だけでは，2 次のコホモロジーに対応する分しかないので，導来圏の場合には，すべての次数のコホモロジー群に対応する安定性条件を考える必要がある，ということになります．それが，ブリッジランドが，物理学者のダグラスの研究に示唆されて考えた，導来圏上の安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(D(X))$ です．

すると，ドナルドソン-トーマス不変量の自然な拡張として，次のように不変量が定まることが期待されます．つまり，安定性条件 $H \in \mathrm{Stab}(D(X))$ を与え，それに応じて H に関して安定な $D(X)$ の対象をパラメトライズするモジュライ空間 $I_n^H(X, \beta)$ を定め，その上で(4)と同様に 1 を積分する．

この H を取り替えたときに，不変量がどのように変わるかを記述するのが，壁越え公式です．2008 年にコンチェヴィッチ-ソイベルマンが，これを与えました．ただ，技術的に難しいところがあり，完全に証明が与えられているとは考えにくいので，精密化が行われている途中である，といったほうがいいかもしれません．なぜ，壁越えとよばれるかというと，安定性の空間にたくさんの壁ができて，壁を越えない限りは不変量は変わらないが，壁を越えると変化するからです．

実は，壁越え公式は，4 次元多様体のドナルドソン不変量の場合にも存在します．それは $b_+ = 1$ となる 4 次元多様体において，ゲッチェがコッチク-モーガン予想が成り立つという仮定のもとで証明したものであり，保型形式で書き表されることが分かっています．また，最近のゲッチェ，吉岡と私の共同研究と，望月拓郎氏の理論を合わせることによって，射影代数曲面のときには，コッチク-モーガン予想を仮定することなく，証明することができました．H が壁を越えるときに，どのような対象が安定から安定でなくなるかを解析するところは，ドナルドソン不変量についても，ドナルドソン-トーマス不変量についても，よく似通っています．しかし，今のところ二つの壁越え公式を直接，関連付けることはできていません．幾何工学の立場からは興味深い問題であると思われます．

［なかじま　ひらく］

●索引

●初出一覧

●ミラー対称性とは（『数学セミナー』2006年10月号）
江口 徹（京都大学基礎物理学研究所）

●グロモフ-ウィッテン不変量入門（『数学セミナー』2006年11月号）
深谷賢治（京都大学大学院理学研究科）

●正多面体とミラー対称性（書き下ろし）
髙橋篤史（大阪大学大学院理学研究科）

●カラビ-ヤウ多様体と代数幾何（『数学セミナー』2006年12月号）
並河良典（京都大学大学院理学研究科）

●特異点と位相的場の理論（『数学セミナー』2007年1月号「ミラー対称性と特異点 I」）
髙橋篤史（大阪大学大学院理学研究科）

●ミラー対称性と共形場の理論（『数学セミナー』2007年2月号）
細野 忍（東京大学大学院数理科学研究科）

●トーリック幾何とカラビ-ヤウ多様体
（『数学セミナー』2007年3月号「ミラー対称性とトーリック幾何学」）
今野 宏（東京大学大学院数理科学研究科）

●フレアーホモロジーとミラー対称性（『数学セミナー』2007年4月号）
深谷賢治（京都大学大学院理学研究科）

●ミラー対称性とD-加群（『数学セミナー』2007年5月号）
マーティン・ゲスト（首都大学東京大学院理工学研究科）＋乙藤隆史（日本大学工学部）

●ミラー対称性とホモロジー代数（『数学セミナー』2007年6月号）
深谷賢治（京都大学大学院理学研究科）

●特異点とミラー対称性（『数学セミナー』2007年7月号「ミラー対称性と特異点 II」）
髙橋篤史（大阪大学大学院理学研究科）

●ミラー対称性を越えて（『数学セミナー』2007年8月号）
中島 啓（京都大学数理解析研究所）

深谷賢治
ふかや・けんじ

1959年生まれ.
1981年，東京大学理学部数学科卒.
現在，京都大学大学院理学研究科教授.
専門は幾何学.
著書として『ゲージ理論とトポロジー』(シュプリンガー・フェアラーク東京),『シンプレクティック幾何学』(岩波書店),『これからの幾何学』(日本評論社),『電磁場とベクトル解析』(岩波書店),『解析力学と微分形式』(岩波書店),『双曲幾何』(岩波書店)などがある.

ミラー対称性入門

2009年9月15日　第1版第1刷発行

編者————深谷賢治

発行者————黒田敏正

発行所————株式会社 日本評論社

〒170-8474　東京都豊島区南大塚3-12-4
電話 03-3987-8621（販売）　03-3987-8599（編集）

印刷————株式会社 精興社

製本————株式会社 難波製本

装丁————STUDIO POT（小久保由美・山田信也）

ISBN 978-4-535-78632-5